

<https://doi.org/10.15407/fmmit2026.42.035>

## **Аналіз h-адаптивного методу скінченних елементів в задачі статичної циліндричної оболонки: II. Кусково лінійні апроксимації та апостеріорний оцінювач їхніх похибок**

Георгій Шинкаренко<sup>1</sup>, Павло Малашняк<sup>2</sup>

<sup>1</sup>професор Львівського національного університету імені Івана Франка, Львів,

<sup>2</sup>аспірант Львівського національного університету імені Івана Франка, Львів,

<sup>1</sup>[heorhiv.shynkarenko@lnu.edu.ua](mailto:heorhiv.shynkarenko@lnu.edu.ua), <sup>2</sup>[pavlo.malashnyak@lnu.edu.ua](mailto:pavlo.malashnyak@lnu.edu.ua)

*Тут ми доповнюємо першу частину цього дослідження, присвячену питанням коректності варіаційної задачі статичної циліндричної оболонки Тимошенка під дією осесиметричних навантажень та критеріям її сингулярної збуреності, алгоритмом обчислення кусковолінійних апроксимацій вектора узагальнених зміщень методом скінченних елементів (МСЕ). З метою уникнення трудомісткого числового інтегрування ми подаємо алгебричні вирази внесків з кожного скінченного елемента до блочнотридіагональної системи лінійних алгебричних рівнянь цього методу. Далі ми пропонуємо поелементно визначений апостеріорний оцінювач похибок (АОП) таких наближень, індикатори якого засновані на квадратичних базисних функціях з коефіцієнтами, які описують залишки апроксимації в центрах скінченного елемента. Ці коефіцієнти пропорційні квадрату довжини скінченного елемента з множниками, які імітують значення других похідних зміщень в центрі його ваги. Решта статті містить результати числового моделювання на прикладі жорстко зацементованої оболонки з примезовими шарами в околах її торців. Детальний аналіз збіжності апроксимацій на рівномірно згущуваних сітках з використанням еквівалентних норм простору допустимих зміщень демонструє надійність та ефективність АОП, здатність відтворювати істинні похибки МСЕ і з високою достовірністю.*

**Вступ.** У першій частині [1] цього дослідження було знайдено достатні умови коректності варіаційної задачі про кругову циліндричну оболонку моделі Тимошенка за осесиметричних крайових та розподілених навантажень. Встановлений там же критерій сингулярної збуреності цієї задачі сигналізує, що за певних умов у таких конструкціях можливе виникнення так званих примезових та/або внутрішніх шарів, які характеризуються локальними концентраторами їхнього напруженого стану і створюють, зокрема, загрози їхньої безпечної експлуатації. З огляду на їхні різноманітні застосування і складність математичного моделювання в останні десятиліття досягнуто значного прогресу завдяки використанню методів числового аналізу, зокрема, методу скінченних елементів, див., напр., [2-8].

З іншого боку, згадані фактори складають труднощі і для числового аналізу характеристик таких оболонок, оскільки апроксимації їх розв'язків супроводжуються великими значеннями похибок, подолати які часто вдається надмірними обчислювальними витратами, наприклад, рівномірним згущенням

**Георгій Шинкаренко, Павло Малашняк Аналіз  $h$ -адаптивного методу скінченних елементів в задачі статички циліндричних оболонок: II. Кусково лінійні апроксимації та апостеріорний оцінювач їхніх похибок**

сіток в методі скінченних елементів чи скінченних різниць. У кожному разі за таких обставин знайдені апроксимації шуканого розв'язку вимагають ефективних і надійних оцінок якості і точності їхнього наближення до істинного розв'язку аналізованої моделі. З цією метою свого часу теорія і практика МСЕ була доповнена концепцією апостеріорного оцінювання похибок [9], яка дістала розвиток в інженерних та наукових обчисленнях, див. монографії [7,10-15] та нещодавні огляди [16-18].

У цій частині статті ми будемо (i) обчислювальну схему МСЕ з використанням апроксимацій вектора узагальнених зміщень оболонки та (ii) доповнюємо її поелементно визначеним апостеріорним оцінювачем похибок АОП залишкового гатунку, здатним обчислити нижню межу істинної похибки в енергетичній нормі (глобальна оцінка) і відтворити її розподіл між скінченними елементами вжитої сітки (локальні оцінки). Вже на цьому етапі дістаємо можливість, наприклад, рівномірним згущенням сітки знаходити наближені розв'язки сингулярно збурених задач із заздалегідь заданою допустимою похибкою.

Щоб в'яснити важливі деталі нашої методики тут використано найпростіші кусково лінійні апроксимації МСЕ і запропоновано спосіб побудови їх апостеріорних оцінювачів похибок, які дозволяють виявити наявність примежових і внутрішніх шарів та локалізувати покращення (згущення) сітки лише в цих регіонах шуканого розв'язку. У цьому зв'язку стаття організована у такий спосіб. У п. 1 ми нагадуємо формулювання варіаційної задачі про рівновагу оболонки [1]. У п. 2 ми подаємо класичну схему МСЕ з побудовою його системи лінійних алгебричних рівнянь для обчислення наближених значень вектора узагальнених зміщень у вузлах не обов'язково рівномірної сітки скінченних елементів. Особливість її формування – обчислення внесків до глобальної матриці та вільних членів з кожного скінченного елемента. Ми подаємо точні значення коефіцієнтів цих внесків, обчислені нами за допущення сталих даних задачі на скінченному елементі. У п. 3 ми також за цих допущень уникаємо числового інтегрування при побудові індикаторів апостеріорного оцінювача похибок (АОП) залишкового гатунку для кусково лінійних апроксимацій МСЕ і наводимо аналітичний вигляд коефіцієнтів їхнього розвинення за кусково квадратичним базисом. Останні наочно демонструють, що похибки обчисленої апроксимації зміщень є величинами, пропорційними квадратам довжин скінченних елементів з лишками, спричиненими неспроможністю відтворити рівняння рівноваги оболонки кусково лінійними базисними функціями МСЕ. П. 4 доповнює теоретичні положення результатами числових експериментів і з модельною сингулярно збуреною крайовою задачею і з примежовими шарами в околах жорстко защемлених торців оболонки. Останні переконливо демонструють надійність та ефективність запропонованого способу побудови АОП для кусково лінійних апроксимацій МСЕ. Висновки підсумовують одержані результати цієї роботи.

## 1. Формулювання варіаційної задачі

Ми розглядаємо осесиметричну задачу статички однорідної ізотропної кругової циліндричної оболонки радіуса  $R$ , довжини  $L$  і товщини  $t, \frac{t}{R} < 1$ , напружено-деформований стан якої, викликаний деякими масовими, поверхневими та торцьовими навантаженнями, може бути змодельований лінійними рівняннями теорії оболонок Тимошенка. Тут ми орієнтуємося на варіаційне формулювання такого класу задач, яке в термінах статті [1] описується таким чином:

знайти вектор зміщень  $\boldsymbol{\psi} = \{u, w, \gamma\} \in \Phi := \left\{ \boldsymbol{\varphi} = \{v, y, \xi\} \in [H^1(\Omega)]^3 : \boldsymbol{\varphi}(0) = 0 \right\}$  такий, що

$$\Pi(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}) = \langle l, \boldsymbol{\varphi} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \Phi, \quad (1.1)$$

де

$$\Pi(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}) := \int_0^L \pi(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}) dz = \int_0^L \boldsymbol{\varepsilon}^T(\boldsymbol{\varphi}) \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\psi}) dz = \int_0^L \boldsymbol{\varepsilon}^T(\boldsymbol{\varphi}) [\mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\psi})] dz \quad \forall \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi} \in \Phi, \quad (1.2)$$

$$\langle l, \boldsymbol{\varphi} \rangle := \int_0^L \mathbf{f}^T \boldsymbol{\varphi} dz + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \boldsymbol{\varphi}(L) = \quad (1.3)$$

$$\int_0^L (f_1 v + f_3 y + f_4 \xi) dz + \bar{N}_1 v(L) + \bar{N}_{13} y(L) + \bar{M}_1 \xi(L) \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \Phi.$$

Тут компоненти тензора деформацій  $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{13}, \kappa]^T$  та компоненти тензора напружень  $\boldsymbol{\sigma} = [N_1, N_2, N_{13}, M_1]^T$ , обчислені на векторі зміщень  $\boldsymbol{\varphi} = \{v, y, \xi\}$ , пов'язуються законом Гука та співвідношеннями Коші  $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi})$  такої структури

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{13} \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & \nu B & 0 & 0 \\ \nu B & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v' \\ y/R \\ y' + \xi \\ \xi' \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

де значення коефіцієнтів матриці  $\mathbf{K}$  визначаються згідно правил

$$B = \frac{2Et}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}, \quad B_c = \frac{Et}{2(1+\nu)} k', \quad k' = \frac{5}{6}, \quad (1.5)$$

Коефіцієнти  $E > 0$  і  $\nu \in (0, 1/2)$  описують модулі пружності Юнга і Пуассона матеріалу оболонки відповідно, за деталями див. [1]. Нарешті, використовуючи (1.4) подамо підінтегральний вираз білінійної форми (1.2) у розгорненому вигляді

$$\begin{aligned} \pi(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) &= \boldsymbol{\varepsilon}^T(\boldsymbol{\varphi}) \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\psi}) = B \left[ (u'v' + R^{-2}wy) + \nu R^{-1}(wv' + u'y) \right] \\ &+ B_c (\gamma + w')(\xi + y') + D \gamma' \xi' \quad \forall \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi} \in \Phi. \end{aligned} \quad (1.6)$$

У першій частині цього дослідження [10] показано, що задача (1.1)-(1.3) має єдиний розв'язок, який неперервно залежить від її даних, як у енергетичній нормі

$$\|\varphi\|_{\Pi} := \Pi^{1/2}(\varphi, \varphi) \quad \forall \varphi \in \Phi, \quad (1.7)$$

так і у еквівалентній їй нормі Соболева  $\mathbf{H}^1(\Omega) := [H^1(\Omega)]^3$ . Більше цього, запропонований в [1] критерій подібності

$$N = \frac{1}{2\sqrt{6\nu}} \frac{R}{L} \frac{t}{L} \quad (1.8)$$

буде слугувати нижче основним параметром для оцінки впливу на сингулярну збуреність моделі оболонки.

## 2. Кусково лінійні апроксимації вектора зміщень

Для обчислення наближеного розв'язку задачі (1.1)-(1.3) із заданим натуральним  $N$  утворимо сітку вузлів  $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_N = L$  та поділ  $\tau_h = \{K_{i+1/2}\}_{i=0}^{N-1}$  на скінченні елементи  $K_{i+1/2} = (z_i, z_{i+1})$ ,  $h_{i+1/2} = |K_{i+1/2}| = z_{i+1} - z_i$ ,  $h = \max_{K_{i+1/2} \in \tau_h} h_{i+1/2}$ .

Сконструємо на  $\tau_h$  кусково лінійні скалярні функції  $\{\varphi_i(z)\}_{i=1}^N$ , з властивостями  $\varphi_i(z_j) = \delta_{ij}$ , локальними носіями  $\Omega_i := \text{supp } \varphi_i = K_{i-1/2} \cup K_{i+1/2}$  для  $i \neq N$ , і  $\Omega_N := \text{supp } \varphi_N = K_{N-1/2}$  для  $i = N$ . Тоді апроксимація МСЕ визначається у вигляді

$$\begin{aligned} \Psi_h(z) &= \sum_{i=1}^N \varphi_i(z) \mathbf{q}_i = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} \varphi_i(z) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_i(z) \\ 0 \end{bmatrix} w_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_i(z) \end{bmatrix} \gamma_i = \\ &= \sum_{i=1}^N [\varphi_{i,1}(z) u_i + \varphi_{i,2}(z) w_i + \varphi_{i,3}(z) \gamma_i] = \sum_{i=1}^N \mathbf{N}_i(z) \mathbf{q}_i \quad \forall z \in \Omega = (0, L), \end{aligned} \quad (2.1)$$

де вектор  $\mathbf{q}_i = \{u_i, w_i, \gamma_i\}^T$  презентує наближене значення вектора узагальненого переміщення у вузлі  $z_i$ :  $\mathbf{q}_i = \Psi_h(z_i) \cong \Psi(z_i)$ . Разом із цим розвинення (2.1) показує, що таким чином визначена апроксимація МСЕ є елементом скінченновимірною підпростору  $\Phi_h \subset \Phi$ , базис якого складають трійки векторів

$$\Phi_h := \text{span} \left[ \left\{ \begin{bmatrix} \varphi_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_i \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_i \end{bmatrix} \right\}_{i=1}^N \right] = \text{span} \left[ \{\varphi_{i,1}, \varphi_{i,2}, \varphi_{i,3}\}_{i=1}^N \right] \quad (2.2)$$

Процедура Рітця-Гальоркіна у цьому випадку приводить (1.1) до задачі для системи лінійних алгебричних рівнянь: знайти коефіцієнти векторів  $\mathbf{q}_i = \{u_i, w_i, \gamma_i\}^T$   $i=1, \dots, N$ , розвинення (2.1) такі, що задовольняють системі з  $3N$  лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} \Pi(\varphi_{i,1}, \varphi_{j,1}) & \Pi(\varphi_{i,2}, \varphi_{j,1}) & \Pi(\varphi_{i,3}, \varphi_{j,1}) \\ \Pi(\varphi_{i,1}, \varphi_{j,2}) & \Pi(\varphi_{i,2}, \varphi_{j,2}) & \Pi(\varphi_{i,3}, \varphi_{j,2}) \\ \Pi(\varphi_{i,1}, \varphi_{j,3}) & \Pi(\varphi_{i,2}, \varphi_{j,3}) & \Pi(\varphi_{i,3}, \varphi_{j,3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \gamma_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle l, \varphi_{j,1} \rangle \\ \langle l, \varphi_{j,2} \rangle \\ \langle l, \varphi_{j,3} \rangle \end{bmatrix}, \quad j=1, \dots, N. \quad (2.3)$$

Внаслідок локальності носіїв скалярних функцій  $\{\varphi_i(z)\}_{i=1}^N$  серед матриць розмірності  $3 \times 3$

$$\mathbf{M}_{ij} := \begin{bmatrix} \Pi(\varphi_{i,1}, \varphi_{j,1}) & \Pi(\varphi_{i,2}, \varphi_{j,1}) & \Pi(\varphi_{i,3}, \varphi_{j,1}) \\ \Pi(\varphi_{i,1}, \varphi_{j,2}) & \Pi(\varphi_{i,2}, \varphi_{j,2}) & \Pi(\varphi_{i,3}, \varphi_{j,2}) \\ \Pi(\varphi_{i,1}, \varphi_{j,3}) & \Pi(\varphi_{i,2}, \varphi_{j,3}) & \Pi(\varphi_{i,3}, \varphi_{j,3}) \end{bmatrix}, \quad i, j=1, \dots, N, \quad (2.4)$$

Ненульовими будуть лише ті, індекси яких задовольняють умові  $|i-j| \leq 1$ . Тому оптимізація трудомістких обчислень коефіцієнтів системи рівнянь МСЕ базується на використанні такої специфіки її будови:

(i) структура системи рівнянь МСЕ (2.3) є блочно трьохдіагональною

$$\mathbf{M}_{11}\mathbf{q}_1 + \mathbf{M}_{12}\mathbf{q}_2 = \mathbf{F}_1,$$

$$\mathbf{M}_{jj-1}\mathbf{q}_{j-1} + \mathbf{M}_{jj}\mathbf{q}_j + \mathbf{M}_{jj+1}\mathbf{q}_{j+1} = \mathbf{F}_j, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{M}_{NN-1}\mathbf{q}_{N-1} + \mathbf{M}_{NN}\mathbf{q}_N = \mathbf{F}_N; \quad j=2, \dots, N-1,$$

(ii) обчислення матриць  $\mathbf{M}_{jj}$  з  $|i-j|=1$  виконується інтегруванням лише на одному скінченному елементі, точніше, матриці  $\mathbf{M}_{jj-1}$ -на елементі  $K_{i-1/2}$  та матриці  $\mathbf{M}_{jj+1}$ -на елементі  $K_{i+1/2}$ ;

(iii) знаходження коефіцієнтів матриць  $\mathbf{M}_{jj}$ ,  $1 \leq j \leq N-1$ , виконується інтегруванням лише на суміжних скінченних елементах зі спільним вузлом  $z_j$ , точніше, на  $K_{j-1/2} \cup K_{j+1/2}$ ,

$$\mathbf{M}_{jj} := \mathbf{B}_{jj} + \mathbf{D}_{j+1j+1} = \left\{ \int_{z_{j-1}}^{z_j} \pi(\varphi_{j,k}, \varphi_{j,m}) dz + \int_{z_j}^{z_{j+1}} \pi(\varphi_{j,k}, \varphi_{j,m}) dz \right\}_{k,m=1}^3,$$

в той же час

$$\mathbf{M}_{11} := \mathbf{D}_{11} = \left\{ \int_{z_0}^{z_1} \pi(\varphi_{1,k}, \varphi_{1,m}) dz \right\}_{k,m=1}^3, \quad \mathbf{M}_{NN} := \mathbf{B}_{NN} = \left\{ \int_{z_{N-1}}^{z_N} \pi(\varphi_{N,k}, \varphi_{N,m}) dz \right\}_{k,m=1}^3;$$

(iv) подібний спосіб обчислення і правих частин системи рівнянь (2.3), а саме,

$$\mathbf{F}_j := \begin{bmatrix} \langle l, \varphi_{j,1} \rangle \\ \langle l, \varphi_{j,2} \rangle \\ \langle l, \varphi_{j,3} \rangle \end{bmatrix} = \mathbf{P}_j + \mathbf{Q}_{j+1} = \int_{z_{j-1}}^{z_j} \begin{bmatrix} \mathbf{f}^T \varphi_{j,1} \\ \mathbf{f}^T \varphi_{j,2} \\ \mathbf{f}^T \varphi_{j,3} \end{bmatrix} dz + \int_{z_j}^{z_{j+1}} \begin{bmatrix} \mathbf{f}^T \varphi_{j,1} \\ \mathbf{f}^T \varphi_{j,2} \\ \mathbf{f}^T \varphi_{j,3} \end{bmatrix} dz, \quad \mathbf{F}_N := \mathbf{P}_N + \begin{bmatrix} \overline{N}_1 \\ \overline{N}_{13} \\ \overline{M}_1 \end{bmatrix}$$

;

(v) система лінійних алгебричних рівнянь  $\mathbf{K}_{i+1/2} \mathbf{q}_{i+1/2} = \mathbf{F}_{i+1/2}$ , описує з точністю до жорстких зміщень статичну рівновагу скінченного елемента  $\mathbf{K}_{i+1/2}$ ,  $1 \leq i \leq N$ , а її розгорнений запис

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ii} & \mathbf{M}_{ii+1} \\ \mathbf{M}_{i+1i} & \mathbf{D}_{i+1+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_i \\ \mathbf{Q}_{i+1} \end{bmatrix} \quad \forall \mathbf{K}_{i+1/2} \in \tau_h \quad (2.6)$$

підказує (добре відомий в практиці) спосіб формування системи (2.5) послідовним додаванням до її складових внесків (2.6) з кожного скінченного елемента. В такий спосіб зменшується кількість обчислень інтегралів як на кожному скінченному елементі, так і рівнянь (2.5) в цілому.

З огляду на малість довжини скінченного елемента  $\mathbf{K}_{i+1/2}$  та лінійність базисних функцій на ньому інтегрування коефіцієнтів системи рівнянь (2.6) можна виконати квадратурами невисокого порядку точності. Альтернативний варіант наближеного знаходження цих коефіцієнтів – підставити під знак інтеграла усереднені в той чи інший спосіб дані задачі та зінтегрувати поліноми найвище другого порядку аналітично. Нижче ми подаємо наш результат цього способу обчислень, який вжито нами нижче.

**Теорема 2.1** про систему рівнянь МСЕ для кусково лінійних апроксимацій.

Нехай для обчислення наближеного розв'язку задачі (1.1)–(1.3) на елементі  $\mathbf{K}_{i+1/2} \in \tau_h$  вжито лінійну апроксимацію зміщень (2.1). Тоді за допущення, що дані задачі апроксимуються значеннями в центрах скінченних елементів, система рівнянь  $\mathbf{K}_{i+1/2} \mathbf{q}_{i+1/2} = \mathbf{F}_{i+1/2}$  з (2.6) обчислюється згідно правила:

Шукані значення  $\mathbf{q}_{i+1/2}^T = [u_i, w_i, \gamma_i, u_{i+1}, w_{i+1}, \gamma_{i+1}]$  вектор правих частин  $\mathbf{F}_{i+1/2}^T = \frac{1}{2} h_{i+1/2} [f_1, f_3, f_4, f_1, f_3, f_4]^T$ , матриця коефіцієнтів

$$\mathbf{K}_{i+1/2} = \begin{bmatrix} \frac{B}{h} & -\frac{Bv}{2R} & 0 & -\frac{B}{h} & -\frac{Bv}{2R} & 0 \\ -\frac{Bv}{2R} & \frac{Bc}{h} + \frac{Bh}{3R^2} & -\frac{Bc}{2} & \frac{Bv}{2R} & -\frac{Bc}{h} + \frac{Bh}{6R^2} & -\frac{Bc}{2} \\ 0 & -\frac{Bc}{2} & \frac{B_c h}{3} + \frac{D}{h} & 0 & \frac{Bc}{2} & \frac{B_c h}{6} - \frac{D}{h} \\ -\frac{B}{h} & -\frac{Bv}{2R} & 0 & \frac{B}{h} & \frac{Bv}{2R} & 0 \\ -\frac{Bv}{2R} & -\frac{Bc}{h} + \frac{Bh}{6R^2} & \frac{Bc}{2} & \frac{Bv}{2R} & \frac{Bc}{h} + \frac{Bh}{3R^2} & \frac{Bc}{2} \\ 0 & -\frac{Bc}{2} & \frac{B_c h}{6} - \frac{D}{h} & 0 & \frac{Bc}{2} & \frac{B_c h}{3} + \frac{D}{h} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

де для скорочення запису прийнято  $h := h_{i+1/2}$ .

Доведення цього твердження одержується безпосередніми обчисленнями інтегралів з (2.6).

### 3. Апостеріорний оцінювач похибки частинами лінійних апроксимацій

Тут ми поширюємо методуку статей [19] та [20] на розв'язання одновимірної задачі про циліндричну оболонку та подаємо повну характеристику наших результатів, аносованих в [10].

Нехай на поділі  $\tau_h = \{K_{i+1/2}\}_{i=0}^{N-1}$  обчислено кусково лінійну апроксимацію

$$\Psi_h(z) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(z) \mathbf{q}_i = \sum_{i=1}^N \varphi_i(z) \{u_i, w_i, \gamma_i\}^T \quad (3.1)$$

розв'язку задачі (1.1)–(1.3). Тоді похибка знайденого наближення  $\mathbf{e} := \Psi - \Psi_h$  визначається як розв'язок задачі про лишок:

$$\begin{cases} \text{знайти похибку } \mathbf{e} \in \mathbf{E}, \mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_h \oplus \mathbf{E} \text{ таку, що} \\ \Pi(\mathbf{e}, \varphi) = \langle R_h, \varphi \rangle := \langle l, \varphi \rangle - \Pi(\Psi_h, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathbf{E}. \end{cases} \quad (3.2)$$

З огляду на те, що  $\dim \mathbf{E} = +\infty$ , наближений розв'язок задачі (3.2) – апостеріорний оцінювач похибки (АОП)  $\boldsymbol{\varepsilon}_h = \boldsymbol{\varepsilon}_h(z)$  – будемо шукати дискретизацією Гальоркіна:

$$\begin{cases} \text{задано } \mathbf{E}_h \subset \mathbf{E}, \dim \mathbf{E}_h = N < +\infty, \quad \Psi_h \in \mathbf{\Phi}_h; \\ \text{знайти оцінювач похибки } \boldsymbol{\varepsilon}_h \in \mathbf{E}_h \text{ такий, що} \\ \Pi(\boldsymbol{\varepsilon}_h, \varphi) = \langle R_h, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathbf{E}_h. \end{cases} \quad (3.3)$$

Щоб вибрати зручний у застосуваннях базис підпростору похибок  $\mathbf{E}_h$ , спочатку подамо довільну ланку апроксимації (3.1) у вигляді

$$\Psi_h(z)|_{K_{i+1/2}} = \mathbf{q}_i \frac{z_{i+1} - z_i}{h_{i+1/2}} + \mathbf{q}_{i+1} \frac{z - z_i}{h_{i+1/2}} = \mathbf{q}_{i+1/2} + (z - z_{i+1/2}) \dot{\mathbf{q}}_{i+1/2} \quad \forall z \in K_{i+1/2}, \quad (3.4)$$

де для скорочення запису ми вживаємо таких позначень

$$\mathbf{q}_{i+1/2} := \frac{1}{2}(\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_{i+1}), \quad \dot{\mathbf{q}}_{i+1/2} := \frac{\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i}{h_{i+1/2}}.$$

Останній рядок у (3.4) нагадує два перші члени розвинення функції за формулою Тейлора. Оскільки, у загальному випадку, МСЕ здатний точно відтворити ці перші члени розвинення, то очікувана похибка кусково лінійного наближення буде порядку залишку, тобто

$$\mathbf{e}(z) := \Psi(z) - \Psi_h(z) = \mathbf{D}(\Psi)(z - z_{i+1/2})^2 = O(h_{i+1/2}^2) \quad \forall z \in K_{i+1/2}.$$

З цих міркувань будемо конструювати локальні індикатори (АОП) у вигляді квадратичних поліномів:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1/2}(z) := b_{i+1/2}(z)\boldsymbol{\lambda}_{i+1/2} = b_{i+1/2}(z)[\lambda_u, \lambda_w, \lambda_\gamma]^T, \\ \text{supp } b_{i+1/2} = K_{i+1/2}, \\ b_{i+1/2}(z) := 4 \frac{z_{i+1} - z}{h_{i+1/2}} \cdot \frac{z - z_i}{h_{i+1/2}} \quad \forall z \in K_{i+1/2}, i = 0, \dots, N-1, \end{array} \right. \quad (3.5)$$

в такому разі *глобальний АОП* матиме кусково квадратичну структуру

$$\boldsymbol{\varepsilon}_h(z) = \sum_{i=0}^{N-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1/2}(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_{i+1/2}(z)\boldsymbol{\lambda}_{i+1/2} \quad \forall z \in [0, L]. \quad (3.6)$$

Добре видно, що на  $K_{i+1/2}$  серед векторів  $\mathbf{E}_h$  ненульовими буде трійка ортогональних векторів

$$\mathbf{b}_1(z) = \begin{bmatrix} b_{i+1/2}(z) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{i+1/2}(z) \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{i+1/2}(z) \end{bmatrix} \quad \forall z \in K_{i+1/2}. \quad (3.7)$$

Тому коефіцієнти  $\boldsymbol{\lambda}_{i+1/2} = \{\lambda_u, \lambda_w, \lambda_\gamma\}$  індикатора  $\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1/2} = \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1/2}(z)$  визначаються із задачі про залишок (3.3) у деталізованому вигляді: *знайти вектор  $\boldsymbol{\lambda}_{i+1/2} \in \mathbb{R}^3$  такий, що*

$$\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1/2}, \mathbf{b}_m) = \langle R_h, \mathbf{b}_m \rangle := \langle l, \mathbf{b}_m \rangle - \Pi(\boldsymbol{\psi}_h, \mathbf{b}_m), m = 1, 2, 3, \quad (3.8)$$

Нарешті після підставлення (3.5) до системи рівнянь (3.8) прийдемо до такого результату.

### Теорема 3.1 про коефіцієнти індикатора АОП

Нехай знайдено апроксимацію  $\boldsymbol{\psi}_h$  і для контролю її похибки  $\mathbf{e}_{i+1/2}(z) = \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h$  на елементі  $K_{i+1/2} \in \tau_h$  використано індикатор  $\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1/2}$ , визначений виразами (3.5).

Тоді розв'язок системи алгебричних рівнянь (3.8)  $\boldsymbol{\lambda}_{i+1/2} = \{\lambda_u, \lambda_w, \lambda_\gamma\}$  обчислюється згідно таких правил:

$$\begin{aligned}\lambda_u &= \frac{\langle R, \mathbf{b}_1 \rangle}{\Pi(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)} = \frac{1}{8} h_{i+1/2}^2 \frac{f_u + vR^{-1}B \frac{w_{i+1} - w_i}{h_{i+1/2}}}{B}, \\ \lambda_w &= \frac{\langle R, \mathbf{b}_2 \rangle}{\Pi(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2)} = \frac{1}{8} h_{i+1/2}^2 \frac{f_w - \frac{B}{R} \left( \frac{1}{R} \frac{w_{i+1} + w_i}{2} + v \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} \right) + B_c \frac{\gamma_{i+1} - \gamma_i}{h_{i+1/2}}}{B_c + \frac{1}{10} BR^{-2} h_{i+1/2}^2}, \\ \lambda_\gamma &= \frac{\langle R, \mathbf{b}_3 \rangle}{\Pi(\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_3)} = \frac{1}{8} h_{i+1/2}^2 \frac{f_\gamma - B_c \left( \frac{w_{i+1} - w_i}{h_{i+1/2}} + \frac{\gamma_{i+1} + \gamma_i}{2} \right)}{D + \frac{1}{10} B_c h_{i+1/2}^2}.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Тут  $\mathbf{q}_m = [u_m, w_m, \gamma_m]^T = \Psi_h(z_m)$ ,  $m = i, i+1$ ,  $f_p = f_p(z_{i+1/2})$ ,  $p = u, w, \gamma$ , тощо.

**Зауваження 3.1.** Підставимо до (3.9) замість  $\mathbf{q}_m = \Psi_h(z_m)$ ,  $m = i, i+1$ , розвинення розв'язку  $\Psi(z_m)$ ,  $m = i, i+1$ , за формулою Тейлора в точці  $z = z_{i+1/2}$ , знехтуємо в знаменниках величинами порядку  $O(h_{i+1/2}^2)$  і вище; тоді, скориставшись рівняннями рівноваги, спростимо (3.9) до вигляду

$$\lambda_u \cong \frac{1}{8} h_{i+1/2}^2 u''(z_{i+1/2}), \quad \lambda_w \cong \frac{1}{8} h_{i+1/2}^2 w''(z_{i+1/2}), \quad \lambda_\gamma \cong \frac{1}{8} h_{i+1/2}^2 \gamma''(z_{i+1/2}). \quad (3.10)$$

Отже, коефіцієнти індикатора  $\varepsilon_{i+1/2}(z)$  допускають таку інтерпретацію: вони є значеннями похідних другого порядку зміщень в центрі скінченного елемента (які анулює кусково лінійна апроксимація МСЕ!) з однаковими вагами  $\frac{1}{8} h_{i+1/2}^2$ . Останні підтверджують, що індикатори похибок відтворюють точкові порядки збіжності кусково лінійних наближень з показниками, які передбачає теорія апіорних оцінок похибок МСЕ.

Поряд із цим, для обчислення енергетичних норм індикаторів та самого АОП одержуємо вирази:

$$\|\varepsilon_{i+1/2}\|_{\Pi}^2 = \Pi(\varepsilon_{i+1/2}, \varepsilon_{i+1/2}) = \Pi_{11}\lambda_u^2 + \Pi_{22}\lambda_w^2 + \Pi_{33}\lambda_\gamma^2 = \rho_1\lambda_u + \rho_2\lambda_w + \rho_3\lambda_\gamma, \quad (3.11)$$

$$\|\varepsilon_h\|_{\Pi}^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \|\varepsilon_{i+1/2}\|_{\Pi}^2. \quad (3.12)$$

Знайдений в (3.11) розподіл наближених значень норм похибок демонструє можливість їх ефективного обчислення на рівні кожного скінченного елемента сітки, в той же час (3.12) характеризує глобальне значення норми АОП в цілому. Ці фактори в сукупності створюють серйозні підстави для створення успішної системи керування похибками апроксимацій МСЕ.

#### 4. Апостеріорні оцінки збіжності

Тут ми аналізуємо властивості похибок апроксимацій МСЕ, обчислених на деякій послідовності вкладених (не обов'язково рівномірних) сіток  $\{\tau_n\}$ ,  $\tau_n \subset \tau_{n+1}$

**Георгій Шинкаренко, Павло Малашняк Аналіз h-адаптивного методу скінченних елементів в задачі статки циліндричних оболонок: II. Кусково лінійні апроксимації та апостеріорний оцінювач їхніх похибок**

, які породжують послідовність вкладених просторів апроксимацій  $\{\Phi_n\}$ ,  $\Phi_n \subset \Phi_{n+1} \subset \Phi$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Отже, нехай послідовність наближень  $\{\psi_n\}$  утворена із розв'язків задач:

знайти  $\psi_n \in \Phi_n \subset \Phi$  такий, що

$$\Pi(\psi_n, \varphi) = \langle l, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \Phi_n, n = 0, 1, \dots, \quad (4.1)$$

які одночасно є розв'язками відповідних задач мінімізації квадратичних функціоналів

знайти  $\psi_n \in \Phi_n$  такий, що

$$J(\psi_n) \leq J(\varphi) = \Pi(\varphi, \varphi) - 2\langle l, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \Phi_n, n = 0, 1, \dots, \quad (4.2)$$

Скориставшись еквівалентністю цих задач обчислимо

$$J(\psi_n) = -\|\psi_n\|_{\Pi}^2 \geq J(\psi) = -\|\psi\|_{\Pi}^2, \quad (4.3)$$

$$\|\psi_n - \psi_{n-1}\|_{\Pi}^2 = \|\psi_n\|_{\Pi}^2 - \|\psi_{n-1}\|_{\Pi}^2, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.4)$$

$$\sum_{i=1}^m \|\psi_{n+i} - \psi_{n-i}\|_{\Pi}^2 = \|\psi_{n+m}\|_{\Pi}^2 - \|\psi_n\|_{\Pi}^2 \geq 0, \quad \forall n, m \in N. \quad (4.5)$$

Тут  $\psi \in \Phi$  – розв'язок задачі (1.1). З (4.3)–(4.5) випливає, що послідовність норм апроксимацій  $\{\|\psi_n\|_{\Pi}\}_{n \geq 0} \subset R$  обмежена і неспадна, а, отже, збіжна:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n\|_{\Pi}^2 = \|\psi\|_{\Pi}^2$ . Тепер, розглядаючи задачу мінімізації на просторі  $\Phi_{n+m} \subset \Phi$  із (4.4) одержуємо, що  $\|\psi_{n+m} - \psi_n\|_{\Pi}^2 = \|\psi_{n+m}\|_{\Pi}^2 - \|\psi_n\|_{\Pi}^2 \rightarrow 0$  разом з  $n \rightarrow \infty$ .

Отже, послідовність апроксимацій  $\{\psi_n\}_{n \geq 0} \subset \Phi$  фундаментальна у цьому просторі і внаслідок його повноти збіжна в ньому до розв'язку (1.1):

$$\|\psi - \psi_n\|_{\Pi}^2 = \|\psi\|_{\Pi}^2 - \|\psi_n\|_{\Pi}^2 \rightarrow 0 \quad \text{разом з } n \rightarrow \infty. \quad (4.6)$$

Підсумовуючи ці міркування на підставі (4.4) і (4.6) приходимо до висновку, що нерівність

$$\|\psi_n - \psi_{n-1}\|_{\Pi}^2 \leq \|\psi\|_{\Pi}^2 - \|\psi_{n-1}\|_{\Pi}^2 = \|\psi - \psi_{n-1}\|_{\Pi}^2, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.7)$$

цілком придатна для оцінки *нижньої межі похибок* послідовності обчислених апроксимацій. Цим важливим фактом для аналізу похибок МСЕ ми скористаємося в п. 5.

## 5. Апостеріорні оцінки збіжності: числові експерименти

Доповнимо наші теоретичні результати даними числових експериментів з моделлю циліндричної оболонки товщини  $t = 0.0025m$ , радіусом середньої поверхні  $R = 0.5m$ , довжиною  $L = 1m$  під дією зовнішнього поверхневого навантаження  $f_u = 0, f_w = -1000^\circ Pa, f_y = 0$ . Модуль пружності матеріалу

оболонки  $E = 10^9 \text{ Па}$  і коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0$ , її торці  $z = 0$  і  $z = L$  жорстко закріплені. За цих умов критерій подібності (1.8) набуває значення  $N = \frac{1}{2\sqrt{6\nu}} \frac{R}{L} \frac{t}{L} \cong 0.0005$ , що сигналізує про сингулярну збуреність її напружено деформованого стану в околах торців оболонки.

Наша мета –проаналізувати показники ефективності та надійності АОП кусково лінійних апроксимацій МСЕ, які обчислювалися на послідовності рівномірно згущуваних сіток скінченних елементів до досягнення такого критерію точності

$$\delta_n := \frac{\|\epsilon_n\|_{\Pi}}{\|\Psi_n\|_{\Pi}} 100\% \leq \text{tol} = 1\%. \quad (5.1)$$

Одержані результати обчислювальних експериментів внесені до табл. 5.1 та 5.2, дані яких різняться лише використанням енергетичної норми  $\|\cdot\|_{\Pi}$  і еквівалентної

$$\text{її норми Соболева } \|\Phi\|_{\Phi}^2 = \left[ \int_0^L \left( |\Phi(z)|^2 + |\Phi'(z)|^2 \right) dz \right]^{1/2} \quad \forall \Phi \in \Phi.$$

Таблиця 5.1

Збіжність послідовності кусково лінійних апроксимацій та глобальних показників апостеріорних оцінювачів їхніх похибок в термінах енергетичної норми

n	$N_n$	$\ \Psi_n\ _{\Pi}$	$\ \epsilon_n\ _{\Pi}$	$\delta_n$ %	$\eta_n$ %	$r_n$ %	$p_n$
0	20	0.863292	0.187177	21.5	22.9	36.8	-
1	40	0.886798	0.158672	17.7	18.7	27.5	0.24
2	80	0.902692	0.129850	14.2	14.6	19.4	0.29
3	160	0.912607	0.097620	10.6	10.2	12.5	0.41
4	320	0.917484	0.062670	6.8	6.1	7.1	0.64
5	640	0.919212	0.034663	3.7	3.2	3.8	0.85
6	1280	0.919691	0.017861	1.9	1.6	1.9	0.96
7	2560	0.919810	0.009001	1.0	-	1.0	0.99

Тут використано такі характеристики наближених розв’язків задачі (1.1):

$$\eta_n := \frac{\|\Psi_n - \Psi_{n+1}\|_{\Pi}}{\|\Psi_{n+1}\|_{\Pi}} 100\%, \quad r_n := \frac{\|\Psi - \Psi_n\|_{\Pi}}{\|\Psi_n\|_{\Pi}} 100\%, \quad (5.2)$$

$$p_{n+1} := \frac{\ln \|\epsilon_n\|_{\Pi} - \ln \|\epsilon_{n+1}\|_{\Pi}}{\ln N_{n+1} - \ln N_n} 100\%,$$

де  $\Psi$  - розв’язок задачі (1.1)-(1.3), обчислений за допомогою Mathematica.

Показники покращення апроксимацій МСЕ зі згущенням сітки демонструють монотонний характер збіжності усіх складових, причому порядок збіжності АОП зростає до одиниці, що добре узгоджується з апіорними оцінками. Відзначимо, що послідовність апроксимацій  $\{\Psi_n\}_{n \geq 0} \subset \Phi$  складається з найкращих наближень до розв’язку  $\Psi$  в кожному з просторів  $\Phi_n$ , тому правило (4.4) може надійно відтворювати глобальні значення похибок.

**Георгій Шинкаренко, Павло Малашняк Аналіз h-адаптивного методу скінченних елементів в задачі статки циліндричних оболонок: II. Кусково лінійні апроксимації та апостеріорний оцінювач їхніх похибок**

Зауважимо, що на відшукання наближення з толерантністю до похибки  $tol = 1\%$  витрачено 7 кроків її уточнення, які в сукупності вимагали обчислення та розв'язання  $5100 \cdot 3 = 15300$  лінійних алгебричних рівнянь. Такі ж результати обчислень з використанням норми простору допустимих функцій  $\|\cdot\|_{\Phi}$  подано в табл. 5.2.

Таблиця 5.2

Збіжність послідовності кусково лінійних апроксимацій та глобальних показників апостеріорних оцінювачів їхніх похибок в термінах норми простору допустимих функцій  $\|\cdot\|_{\Phi}$ .

n	$N_n$	$\ \Psi_n\ _{\Phi}$	$\ \epsilon_n\ _{\Phi}$	$\delta_n \%$	$\eta_n \%$	$r_n \%$	$p_n$
0	20	0.004522	0.027587	33.0	100.0	610.0	-
1	40	0.007730	0.024827	23.1	81.1	321.2	0.15
2	80	0.012678	0.019498	16.2	79.3	153.8	0.35
3	160	0.019053	0.011820	11.0	74.7	62.0	0.72
4	320	0.024475	0.005050	6.9	62.8	20.6	1.23
5	640	0.027424	0.001758	3.8	45.1	6.4	1.52
6	1280	0.027013	0.000665	2.0	18.6	2.4	1.40
7	2560	0.028132	0.000316	1.00	12.4	1.1	1.07

Проте дані цієї таблиці показують неточність оцінок похибок, обчислених за правилом (4.4) в нормі  $\|\cdot\|_{\Phi}$ . Порядки збіжності  $p_n$  норм  $\{\|\epsilon_n\|_{\Phi}\}$  та їхніх відносних значень  $\{\delta_n\}$  на початкових кроках уточнення характеризуються монотонним зростанням до показника  $p_5 \cong 1.5$ , після чого ці показники опускаються до очікуваного рівня одиниці. Відсутність монотонності порядків збіжності скоріш за все пояснюється втратою апроксимацій МСЕ в цій нормі статусу найкращих наближень.

Нижче на рис. 5.1-5.4 ми подаємо результати обчислень, одержані на останньому кроці нашого уточнення апроксимацій МСЕ на сітці з  $N_7 = 2560$  скінченних елементів.

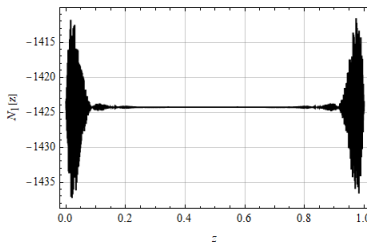


Рис. 5.1. Розподіл зусилля  $N_1(z)$  вздовж меридіана оболонки

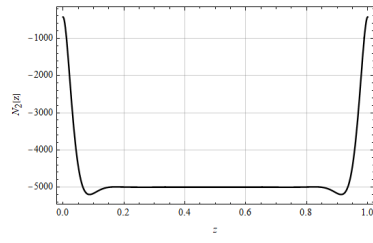


Рис. 5.2. Розподіл зусилля  $N_2(z)$  вздовж меридіана оболонки

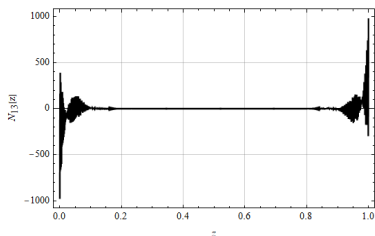


Рис. 5.3. Розподіл зусилля  $N_{13}(z)$  вздовж меридіана оболонки

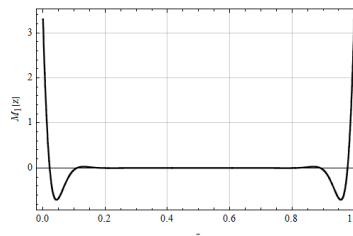


Рис. 5.4. Розподіл моменту  $M_{13}(z)$  вздовж меридіана оболонки

Внаслідок сингулярно збуреності розглядуваної задачі всі наведені характеристики напружено деформованого стану оболонки демонструють величезні зміни їхніх значень (особливо похідних) в околах защемлених торців, які можна відтворити із використанням сіток з високою роздільною здатністю. Хоча на цій стадії обчислення виконані з відносною похибкою  $\delta_n \cong 1\%$ , проте така інтегральна характеристика знайденої апроксимації, як показують дефекти (осциляції) наближень на рис. 5.1 і рис.5.3, все ж не гарантує якісного відтворення локальних змін наближень в околах примежових шарів навіть за таких високих обчислювальних витрат.

Один із підсумків нашого аналізу нашої думку в актуальності розробки надійної технології ідентифікації примежових шарів та локального згущення сітки скінченних елементів в цих регіонах області визначення шуканого розв'язку. Якщо інструмент для ідентифікації примежових шарів вже створено у цій частині нашого дослідження, то розробці стратегії локального покращення сіток МСЕ буде присвячено його заключна частина.

**Висновки.** Для наближеного розв'язання задачі статичної циліндричної оболонки Тимошенка в даній статті розглянуто таку числову методикку:

- (i) аналіз коректності варіаційного формулювання крайової задачі про осесиметричне поверхневе і об'ємне навантаження та критерії її сингулярної збуреності, див. частину I [1];
- (ii) конструювання алгоритму та програмну реалізацію методу скінченних елементів з використанням кусково лінійних апроксимацій вектора узагальнених зміщень;
- (iii) розроблення апостеріорних оцінок похибок знайденого наближення, які дозволяють надійно та ефективно контролювати розподіл їх значень між скінченними елементами сітки як в енергетичній нормі задачі, так і еквівалентній нормі простору допустимих зміщень (простору векторних функцій Соболева першого порядку).

З метою оптимізації комп'ютерних витрат запропонований алгоритм МСЕ засновано на збиранні дискретних рівнянь з аналітично обчислених (за допущення сталих даних задачі або їх апроксимації значеннями у центрі скінченного елемента) внесків кожного скінченного елемента сітки.

Нарешті, щоб оцінити рівень похибки знайденого наближення запропоновано кусково квадратичний апостеріорний оцінювач залишкового

**Георгій Шинкаренко, Павло Малашняк Аналіз h-адаптивного методу скінченних елементів в задачі статички циліндричних оболонок: II. Кусково лінійні апроксимації та апостеріорний оцінювач їхніх похибок**

гатунку, поелементне обчислення його значень (індикаторів) вимагає формування і розв'язання трьох алгебричних рівнянь, розв'язки яких презентують наближені значення похідних зміщень другого порядку з вагами, пропорційними квадратам діаметрів скінченних елементів.

Теоретичну характеристику запропонованої методики числового моделювання доповнено результатами обчислювальних експериментів з рівномірно навантаженою тонкою оболонкою, сингулярна збуреність якої є наслідком жорсткого защемлення її торців. Аналіз збіжності послідовності апроксимацій МСЕ на рівномірно згущуваних сітках та оцінка їхньої якості пропонованим оцінювачем похибок продемонстрував здатність останнього надійно обчислювати нижню межу істинної похибки наближення у повній відповідності показникам добре відомих апріорних оцінок збіжності.

## **Література**

1. Шинкаренко Г., Малашняк П. Аналіз h-адаптивного методу скінченних елементів в задачі статички циліндричних оболонок: I. Коректність осесиметричного варіаційного формулювання // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. 2025, вип. 40: 27-36.
2. Бернакевич І.С., Вагін П.П., Шинкаренко Г.А. Математична модель акустичної взаємодії оболонок з рідиною. II. Проекційно-сіткові апроксимації та їх збіжність. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2004; 47(3): 37-44.
3. Вагін П.П., Іванова Н.В., Шинкаренко Г.А. Постановка, розв'язуваність та апроксимація варіаційних задач статички зсувних оболонок. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 1999; 42(2): 53-61.
4. Григоренко Я.М., Савула Я.Г., Муха І.С. Линейные и нелинейные задачи упругого деформирования оболочек сложной формы и методы их численного решения. *Приклад. механика.* 2000; 36(8): 3–27.
5. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А., Вовк В.Н. Некоторые приложения метода конечных элементов. *Львов: Изд-во Львов. ун-та;* 1981.
6. Савула Я.Г., Флейшман Н.П. Расчет и оптимизация оболочек с резными срединными поверхностями *Львов: Вищашкола;* 1989.
7. Трушевський В.М., Шинкаренко Г.А., Щербина Н.М. Метод скінченних елементів і штучні нейронні мережі. Теоретичні аспекти і застосування. *Львів, Вид. центр ЛНУ ім. Івана Франка,* 2014 – 396 с.
8. M. Radwańska, A. Stankiewicz, A. Wosatko, J. Pamin. *Plate and Shell Structures. Selected Analytical and Finite Element Solutions.* John Wiley & Sons, 2017.
9. Babuška I., Rheinboldt W. Error estimates for adaptive finite element computations // *SIAM J. Numer. Analysis,* 1978, 15: 736–754.
10. Шинкаренко Г., Малашняк П. Аналіз h-адаптивних апроксимацій МСЕ в задачах статички циліндричних оболонок. 11-а Міжнар. наук. конф. Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: Збірник наукових праць. *Львів: ІППИМ ім. Я. Підстригача НАНУ;* 2024; 6: 41-42.
11. Ainsworth M., Oden J. T. *A posteriori error estimation in finite element analysis.* John Wiley & Sons, 2000.
12. Babuška I., and T. Strouboulis. *The finite element method and its reliability.* Oxford University Press, 2001.
13. Babuška I., Whiteman J.R., Strouboulis T. *Finite Elements: An Introduction to the Method and Error Estimation.* Oxford University Press, 2011. 316 p.
14. Verfürth R. *A Review of A Posteriori Error Estimates and Adaptive Mesh-Refinement Techniques.* Wiley-Teubner, 1996.
15. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L, Zhu J. *The finite element method: its basis and fundamentals (7th Edition).* Oxford, UK: Elsevier, 2015.

16. Chamoin L., Legoll F. An Introductory Review on A Posteriori Error Estimation in Finite Element Computations // SIAM Review 2023, vol. 65, iss. 4: 917-1197.
17. Segeth K. A review of some a posteriori error estimates for adaptive finite element methods // Math. Comput. Simul. 2010, 80: 1589–1600.
18. Verfürth R. A Posteriori Error Estimation Techniques for Finite Element Methods. Oxford University Press, 2013. – 416 p.
19. Абрамов Є., Ліпіна О., Шинкаренко Г., Ямелинець А. Кусково-лінійні апроксимації h-адаптивного методу скінченних елементів для одновимірних крайових задач // Вісник Львів. ун-ту. Сер. приклад. матем. інформ. 2006. Вип. 11: 3-189.
20. Квасниця Г., Малашняк П., Шинкаренко Г. Порівняння h-адаптивних схем МСЕ різних порядків для одновимірних крайових задач // Вісник Львів. ун-ту. Сер. приклад. матем. інформ. 2022. Вип. 30: 45-59.

## Analysis of the h-Adaptive Finite Element Method in Static Problems of Cylindrical Shells: II. Piecewise Linear Approximations and an A Posteriori Error Estimator

Heorhiy Shynkarenko<sup>1</sup>, Pavlo Malashnyak<sup>2</sup>

*In this paper, we extend the first part of our study, devoted to the analysis of the well-posedness of the axisymmetric variational formulation of the static boundary value problem for a Timoshenko cylindrical shell and to the identification of criteria for its singular perturbation. The present contribution focuses on the development of a finite element algorithm for computing piecewise linear approximations of the generalized displacement vector of the shell. To avoid computationally expensive numerical integration procedures, we derive explicit algebraic expressions for the contributions of individual finite elements to the resulting block tridiagonal system of linear algebraic equations associated with the finite element method (FEM). This representation significantly simplifies the implementation while preserving the accuracy of the method. Furthermore, an elementwise defined a posteriori error estimator (APEE) is proposed for the constructed FEM approximations. The corresponding error indicators are based on quadratic shape functions with coefficients characterizing the approximation residuals evaluated at the centers of finite elements. These coefficients are proportional to the square of the element length and include factors that emulate the values of the second derivatives of the displacement components at the element centroid. The remainder of the paper is devoted to numerical experiments for a fully clamped cylindrical shell exhibiting pronounced boundary layers in the vicinity of its ends. A detailed convergence analysis of the FEM approximations on uniformly refined meshes, performed in equivalent norms of the space of admissible displacements, demonstrates the reliability and efficiency of the proposed a posteriori error estimator, as well as its ability to reproduce the true FEM errors with high accuracy.*

Отримано 12 02 2026