

<https://doi.org/10.15407/fmmit2026.42.026>

Взаємодія тріщин скруту через тонкий податливий прошарок у пружному біматеріалі з двох півпросторів

Іван Звізло¹, Назар Станкевич²

¹Доцент, к. ф.-м. н., кафедра механіки Львівського національного університету імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, e-mail zvizloivan0@gmail.com

²Аспірант, e-mail nazarstankevych503@gmail.com

Проведено гранично-інтегральне формулювання задачі дослідження напружено-деформівного стану безмежного біматеріалу з двох півпросторів з круговими тріщинами під статичним крутним навантаженням. Півпростори сконтактовані тонким пружним податливим прошарком. З використанням неklasичних умов контакту на інтерфейсі задачу зведено до розв'язування системи двовимірних граничних інтегральних рівнянь типу Ньютонівського потенціалу відносно невідомих функцій зсувних зміщень поверхонь дефектів. За допомогою розв'язків задачі обчислено коефіцієнти інтенсивності напружень поздовжнього зсуву та проаналізовано їх залежності від співвідношення жорсткостей компонент тіла, відстані дефектів до інтерфейсу та товщини прошарку.

Ключові слова: пружний біматеріал, тонкий прошарок, кругові тріщини скруту, метод граничних інтегральних рівнянь, коефіцієнт інтенсивності напружень.

Вступ. Оцінювання міцності та поведінки елементів конструкцій кусково-однорідної структури передбачає врахування властивостей їх окремих компонент, характеру зміни в часі навантаження, наявності тріщиноподібних дефектів, коректного опису умов контакту на інтерфейсі тощо. Більшість літературних джерел зазначеної тематики присвячено задачам аналізу кусково-однорідних тіл з тріщинами за умов ідеального механічного контакту на плоских поверхнях розмежування середовищ [1–3]. Водночас, тривала експлуатація зазначених конструктивних елементів спричиняє порушення адгезійних зв'язків на інтерфейсних поверхнях, що вимагає від дослідників під час математичного моделювання задач враховувати на них неklasичні крайові умови неідеального контакту, наприклад, контакту з проковзуванням [4, 5], контакту з тертям, наявності інтерфейсних тріщин на цих поверхнях [6–11]. Окремий інтерес викликає наявність тонкого податливого прошарку між окремими компонентами кусково-однорідних тіл внаслідок взаємної дифузії різнорідних матеріалів чи їх склеювання [12–14]. Впливу таких аспектів на міцність тіл з тріщинами в літературі приділено недостатньо уваги. У праці розглянуто статичну задачу про крутне навантаження пружного біматеріалу з двох півпросторів, сконтактованих

Іван Звізло, Назар Станкевич Взаємодія тріщин скруту через тонкий податливий прошарок у пружному біматеріалі з двох півпросторів

тонким податливим прошарком, за наявності в них кругових тріщин. Дослідження виконано методом граничних інтегральних рівнянь.

1. Формулювання задачі.

Розглянемо пружний біматеріал, який складається з двох ізотропних півпросторів A і B , ідеально сконтакттованих тонким податливим прошарком завтовшки h . Матеріали півпросторів характеризують модулі зсуву G_D , $D=A,B$, а прошарку – $G_0 \ll G_D$. В обидвох півпросторах розташовані дискові тріщини, які займають кругові плоскі області S_1, S_2 радіусів a_1, a_2 , паралельні серединній поверхні S_0 прошарку і розташовані від неї на глибинах d_1, d_2 , відповідно (рис. 1). На протилежні поверхні $S_i^\pm, i=1,2$ тріщин діють самозрівноважені крутні зусилля

$$N_j^+(\mathbf{x}_i) = -N_j^-(\mathbf{x}_i) = (-1)^{j+1} \frac{x_{(3-j)i}}{a_i} N_0, \quad i, j = 1, 2, \quad N_0 = \text{const}, \quad \mathbf{x}_i \in S_i, \quad N_3(\mathbf{x}_i) = 0.$$

На інтерфейсній поверхні S_0 вибираємо декартову систему координат $O_0 x_{10} x_{20} x_{30}$, у площинах розташування тріщин – декартові системи координат $O_i x_{1i} x_{2i} x_{3i}, i=1,2$ таким чином, щоб область S_i дефекту розташовувалася в площині $x_{1i} O_i x_{2i}$, а координатні осі x_{30}, x_{3i} лежали на нормалі до S_0 (рис. 1).

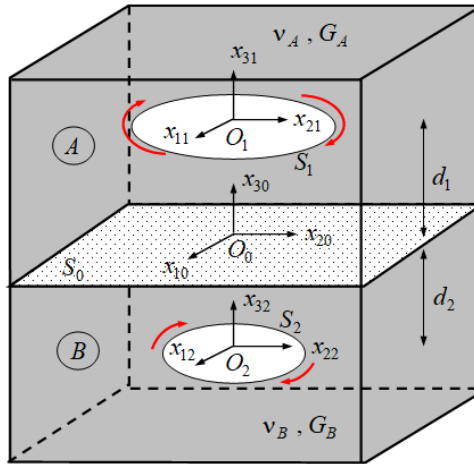


Рис. 1. Розрахункова схема задачі.

Задача визначення напружено-деформованого стану біматеріалу з дефектами під навантаженнями зводиться до розв’язання диференціальних рівнянь руху відносно компонент вектора $\bar{\mathbf{u}}^D$ переміщень

$$\Delta_3 \bar{\mathbf{u}}^D = 0, \quad D = A, B \tag{1}$$

з двома групами крайових умов. Перша група контакту півпросторів тонким прошарком сформульована на поверхні S_0 і описує пружинні крайові умови (ПКУ) [14]

$$\sigma_{j3}^A(\mathbf{x}) = \sigma_{j3}^B(\mathbf{x}) = \frac{G_0}{h} [u_j^A(\mathbf{x}) - u_j^B(\mathbf{x})], \quad j=1,2. \quad (2)$$

Друга група крайових умов задачі задана в областях S_i розташування тріщин

$$\sigma_{j3}^D(\mathbf{x}_i) = (-1)^{j+1} \frac{x_{(3-j)i}}{a_i} N_0, \quad \sigma_{33}^D(\mathbf{x}_i) = 0, \quad \mathbf{x}_i \in S_i, \quad i, j=1,2. \quad (3)$$

2. Гранично-інтегральне формулювання задачі.

Переміщення у півпросторі D обумовлені зміщеннями точок інтерфейсної поверхні S_0 і протилежних поверхонь S_i^\pm тріщини. Їх інтегральні подання описуємо Ньютонівськими потенціалами [14]

$$u_j^{\{B\}}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial}{\partial x_{30}} \iint_{S_0} \alpha_j^{\{B\}}(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_0 - \xi|} + \frac{\partial}{\partial x_{\left\{ \begin{smallmatrix} 310 \\ 320 \end{smallmatrix} \right\}}} \iint_{S_{\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}}} \Delta u_j^{\{B\}}(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_{\left\{ \begin{smallmatrix} 10 \\ 20 \end{smallmatrix} \right\}} - \xi|}, \quad j=1,2, \quad (4)$$

де $|\mathbf{x}_{\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{smallmatrix} \right\}} - \xi| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_{30}^2}$ – відстань між фіксованими точками

$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{10}, \mathbf{x}_{20}$ півпросторів A, B та точкою $\xi(\xi_1, \xi_2, 0)$ областей інтегрування S_0, S_i ; $x_{310} = x_{30} - d_1, x_{320} = d_2 - x_{30}$. Невідомі густини $\alpha_j^D, D=A, B$ визначені на інтерфейсній поверхні, а Δu_j^D – характеризують стрибок взаємних зміщень відповідних точок протилежних поверхонь S_i^\pm дефектів у напрямку осей x_j . Інтегральні подання для напружень у півпросторах отримуємо підстановкою (4) у співвідношення закону Гука

$$\sigma_{j3}^{\{B\}}(\mathbf{x}) = -G_{\left\{ \begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix} \right\}} \Delta_2 \iint_{S_0} \alpha_j^{\{B\}}(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_0 - \xi|} - G_{\left\{ \begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix} \right\}} \Delta_2 \iint_{S_{\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}}} \Delta u_j^{\{B\}}(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_{\left\{ \begin{smallmatrix} 10 \\ 20 \end{smallmatrix} \right\}} - \xi|}, \quad j=1,2, \quad (5)$$

де $\Delta_2 = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$ – двовимірний Лапласів оператор.

Сформульовану крайову задачу розв'язуємо у два етапи. На першому задовольняємо крайові умови (2) на інтерфейсній поверхні S_0 . Підставивши в них інтегральні подання (4), (5) для переміщень і напружень, ПКУ (2)

Іван Звізло, Назар Станкевич Взаємодія тріщин скруту через тонкий податливий прошарок у пружному біматеріалі з двох півпросторів

трансформуємо в систему 4-х двовимірних граничних інтегральних рівнянь (ГІР) типу згортки, заданих на безмежній поверхні інтерфейсу S_0

$$\begin{aligned} & \left\{ -G_A \Delta_2 - \frac{G_0}{h} \frac{\partial}{\partial x_{30}} \right\} \iint_{S_0} \alpha_j^A(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_0 - \xi|} + \frac{G_0}{h} \frac{\partial}{\partial x_{30}} \iint_{S_0} \alpha_j^B(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_0 - \xi|} = \frac{G_0}{h} U_{1j} + U_{2j} , \\ & -\frac{G_0}{h} \frac{\partial}{\partial x_{30}} \iint_{S_0} \alpha_j^A(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_0 - \xi|} + \left\{ -G_B \Delta_2 + \frac{G_0}{h} \frac{\partial}{\partial x_{30}} \right\} \iint_{S_0} \alpha_j^B(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_0 - \xi|} = \frac{G_0}{h} U_{1j} + U_{3j} . \end{aligned} \quad (6)$$

Тут

$$\begin{aligned} U_{1j} &= \frac{\partial}{\partial x_{310}} \iint_{S_1} \Delta u_j^A(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_{10} - \xi|} - \frac{\partial}{\partial x_{320}} \iint_{S_2} \Delta u_j^B(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_{20} - \xi|} , \\ U_{2j} &= G_A \Delta_2 \iint_{S_1} \Delta u_j^A(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_{10} - \xi|} , \quad U_{3j} = G_B \Delta_2 \iint_{S_2} \Delta u_j^B(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_{20} - \xi|} . \end{aligned}$$

Праві частини в (6) тимчасово приймаємо відомими. Подівавши на інтегральні рівняння (6) двовимірним інтегральним перетворенням Фур'є за змінними x_1, x_2 з урахуванням теореми про згортку, отримуємо систему 4-х лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) відносно Фур'є-трансформант 4-х невідомих густин $\tilde{\alpha}_j^D$, $j=1,2$, $D=A,B$. Оригінали цих функцій після застосування до розв'язків СЛАР оберненого перетворення Фур'є набувають вигляду

$$\begin{aligned} \alpha_j^{\{B\}}(\varsigma) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta(\tau)} \left[G_{\{B\}} G_0 \tau \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{310}} \iint_{S_1} \Delta u_j^A(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_{10} - \xi|} - \frac{\partial}{\partial x_{320}} \iint_{S_2} \Delta u_j^B(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_{20} - \xi|} \right\} - \right. \\ & \left. \mp \left\{ G_A \iint_{S_1} \Delta u_j^A(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_{10} - \xi|} - G_B \iint_{S_2} \Delta u_j^B(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_{20} - \xi|} \right\} - G_A G_B \tau^3 h \iint_{S_{\begin{smallmatrix} \{1\} \\ \{2\} \end{smallmatrix}}} \Delta u_j^{\{A\}}(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_{\begin{smallmatrix} \{10\} \\ \{20\} \end{smallmatrix}} - \xi|} \right] \cdot \\ & \cdot J_0(\tau|\varsigma - \boldsymbol{\eta}|) d\tau dS_{\boldsymbol{\eta}} , \quad j=1,2 , \end{aligned} \quad (7)$$

де $J_0(y)$ – Бесселева функція першого роду нульового порядку дійсного аргументу y ; $\Delta(\tau) = \tau \{ G_A G_B \tau h + (G_A + G_B) G_0 \}$.

Скориставшись поданнями (7) та описаною у праці [15] методикою, отримуємо аналітичні подання для кратних двовимірних інтегралів по безмежній області S_0

$$\iint_{S_0} \alpha_j^{\{B\}}(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_{\begin{smallmatrix} \{01\} \\ \{02\} \end{smallmatrix}} - \xi|} =$$

$$\begin{aligned}
 &= - \iint_{S_{\begin{smallmatrix} \{1\} \\ \{2\} \end{smallmatrix}}} \Delta u_j^{\begin{smallmatrix} \{A\} \\ \{B\} \end{smallmatrix}}(\xi) \int_0^\infty \frac{1}{\Delta(\tau)} \left\{ G_A G_B \tau h + G_0 (G_{\begin{smallmatrix} \{A\} \\ \{B\} \end{smallmatrix}} - G_{\begin{smallmatrix} \{B\} \\ \{A\} \end{smallmatrix}}) \right\} e^{-2d_{\begin{smallmatrix} \{1\} \\ \{2\} \end{smallmatrix}} \tau} J_0(\tau |\mathbf{x}_1 - \xi|) d\tau dS_\xi + \\
 &+ 2 \iint_{S_{\begin{smallmatrix} \{2\} \\ \{1\} \end{smallmatrix}}} \Delta u_j^{\begin{smallmatrix} \{B\} \\ \{A\} \end{smallmatrix}}(\xi) \int_0^\infty \frac{G_{\begin{smallmatrix} \{B\} \\ \{A\} \end{smallmatrix}} G_0}{\Delta(\tau)} e^{-(d_1+d_2)\tau} J_0(\tau |\mathbf{x}_1 - \xi|) d\tau dS_\xi . \quad (8)
 \end{aligned}$$

Наступний етап розв'язування задачі полягає у задоволенні крайових умов (3) в області розташування тріщин. З урахуванням виразів (5), (8) крайові умови (3) трансформуємо до вигляду

$$\begin{aligned}
 &\Delta_2 \iint_{S_i} \Delta u_j^D(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_i - \xi|} + \\
 &+ \iint_{S_i} \Delta u_j^D(\xi) \int_0^\infty \frac{\tau^2}{\Delta(\tau)} \left\{ G_A G_B \tau h + G_0 (-1)^i (G_B - G_A) \right\} e^{-2d_i \tau} J_0(\tau |\mathbf{x}_i - \xi|) d\tau dS_\xi - \\
 &- 2 \iint_{S_{3-i}} \Delta u_j^{\bar{D}}(\xi) \int_0^\infty \frac{(\delta_{i1} G_B + \delta_{i2} G_A) G_0 \tau^2}{\Delta(\tau)} e^{-(d_1+d_2)\tau} J_0(\tau |\mathbf{x}_{3-i} - \xi|) d\tau dS_\xi = \quad (9) \\
 &= \frac{(-1)^j x_{(3-j)i}}{G_D a_i} N_0 , \quad \mathbf{x}_i(x_{1i}, x_{2i}) \in S_i , \quad i=1, \bar{D} = B \text{ для } D = A , \quad i=2, \bar{D} = A \text{ для } D = B .
 \end{aligned}$$

Система (9) є системою 4-х двовимірних ГІР для визначення 4-х невідомих функцій Δu_j^D , $D = A, B$, $j = 1, 2$ тангенційних зсувів протилежних поверхонь тріщин у півпросторах. Отримана система ГІР не містить інтегрування по безмежній області S_0 , що суттєво для використання числових методів. Наявність півбезмежного інтегралу враховує феномен взаємодії дефекту з інтерфейсною поверхнею.

Розглядаємо частковий випадок 2-х однакових півпросторів з дисковими тріщинами скруту радіусів a , розташованих на відстані d від серединної поверхні тонкого податливого прошарку завтовшки h . Приймаємо $S_1 = S_2 = S$, $G_A = G_B = G$, $\Delta u_j^A = \Delta u_j^B = \Delta u_j$. Тоді ГІР (9) спрощуються до системи 2-х двовимірних ГІР

$$\begin{aligned}
 &\Delta_2 \iint_S \Delta u_j(\xi) \frac{dS_\xi}{|\mathbf{x} - \xi|} + \iint_S \Delta u_j(\xi) \int_0^\infty \tau^2 \frac{G\tau h - 2G_0}{G\tau h + 2G_0} e^{-2d\tau} J_0(\tau |\mathbf{x} - \xi|) d\tau dS_\xi = \\
 &= \frac{(-1)^j x_{(3-j)}}{G a} N_0 , \quad \mathbf{x}(x_1, x_2) \in S , \quad j = 1, 2 . \quad (10)
 \end{aligned}$$

3. Числове розв'язування ГІР.

Під час числового розв'язування ГІР (10) невідомі густини Δu_j з урахуванням змикань поверхонь тріщин на їх контурах вибрано у вигляді

$$\Delta u_j(\mathbf{x}) = \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2} \beta_j(\mathbf{x}),$$

де $\beta_j(\mathbf{x})$ – невідомі, обмежені та двічі неперервно-диференційовні в області S функції. Подальшу регуляризацію та методику числового розв'язання ГІР описано в праці [14]. Кругові області дефектів у полярній системі координат покривали чотирикутними граничними елементами з кроками розбиття $0,05a$ за радіальною координатою r і $\pi/12$ – за куговою координатою φ . Рівняння (10) зводили до розв'язування СЛАР відносно дискретних, кусково-сталих у межах граничних елементів значень $\beta_j(\mathbf{x})$. За допомогою значень останніх на контурі тріщини визначали ДКІН поздовжнього зсуву

$$K_{III}(\varphi) = -2G\pi\sqrt{\pi a} [\beta_1(a, \varphi) \sin \varphi - \beta_2(a, \varphi) \cos \varphi].$$

4. Аналіз числових результатів.

На рис. 2-4 показано залежності нормованих амплітуд КІН $\bar{K}_{III} = K_{III} / K_{III}^{\text{hom}}$ ($K_{III}^{\text{hom}} = (4/3)\sqrt{a/\pi} N_0$ – статичний КІН поздовжнього зсуву для кругової тріщини у безмежному однорідному тілі [16] під дією крутних зусиль). Рис. 2 демонструє залежності \bar{K}_{III} від глибини залягання тріщини d/a , контрастності жорсткостей матеріалів півпросторів і прошарку $\tilde{G} = G_0/G$ за фіксованого значення товщини прошарку $h/a = 0,1$. Маркована колами лінія описує випадок поодинокій тріщини скруту у вільному півпросторі ($\tilde{G} = 0$), квадратами – дві тріщини у безмежному однорідному тілі ($\tilde{G} = 1$). Аналіз графіків показує, що збільшення податливості прошарку супроводжується збільшенням значень \bar{K}_{III} . Водночас вказані графіки мажоровані зверху/знизу своїми аналогами для випадків поодинокій тріщини у вільному півпросторі/2-х тріщин у безмежному однорідному тілі. Зі збільшенням глибини залягання дефектів значення КІН спадають і прямують до свого аналогу для поодинокій тріщини в безмежному однорідному тілі. Для значень $d/a \geq 1,5$ вплив контрастності матеріалів та відстані між дефектами відсутній. Аналогічний феномен раніше спостережений для поодинокій тріщини в біматеріалі за ідеального контакту його компонент [14].

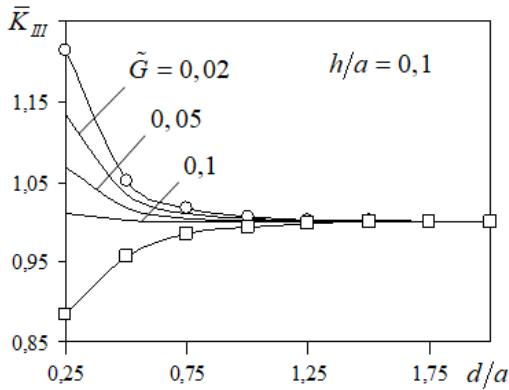


Рис. 2. Залежності нормованих КІН \bar{K}_{III} від глибини залягання тріщин d/a та \tilde{G} ($h/a=0,1$)

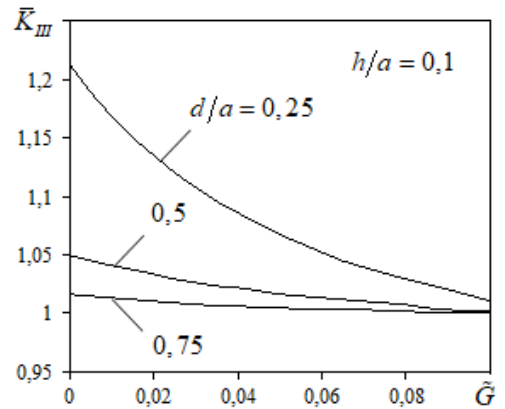


Рис. 3. Залежності \bar{K}_{III} від контрастності жорсткостей матеріалів \tilde{G} та d/a ($h/a=0,1$)

На рис. 3 подано залежності \bar{K}_{III} від параметрів \tilde{G} та d/a за фіксованого значення $h/a=0,1$. Незалежно від відстаней між дефектами зростання жорсткості прошарку супроводжується монотонним зменшенням значень \bar{K}_{III} . Вказаний ефект зміцнення біматеріалу з тріщинами більш відчутний зі зменшенням відстаней між дефектами.

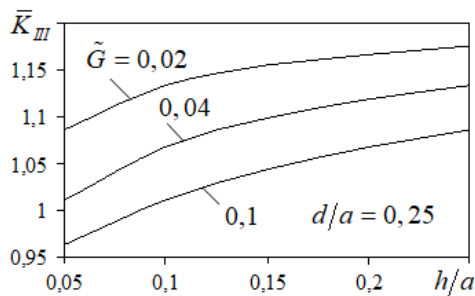


Рис. 4. Залежності нормованих КІН \bar{K}_{III} від товщини прошарку h/a та \tilde{G} ($d/a=0,25$).

На рис. 4 показано залежності нормованих КІН від параметрів h/a та \tilde{G} за фіксованої глибини $d/a=0,25$ залягання дефектів. Видно, що зростання товщини прошарку супроводжується ефектом монотонного збільшення значень

Іван Звізло, Назар Станкевич Взаємодія тріщин скруту через тонкий податливий прошарок у пружному біматеріалі з двох півпросторів

\bar{K}_{III} та ймовірності підростання дефектів. Така ситуація більш відчутна зі зростанням податливості прошарку. Зазначимо, що загалом наявність податливого прошарку підсилює значення КІН, що потрібно враховувати під час коректного моделювання реального контакту компонент конструкцій для оцінки їхньої міцності.

Висновки. Методом ГР досліджено задачу статичного навантаження пружного біматеріалу з круговими тріщинами скруту. Біматеріал складається з півпросторів, сконтакттованих тонким податливим прошарком. За використання пружинних крайових умов задачу зведено до розв'язання системи взаємопов'язаних двовимірних ГР відносно невідомих функцій тангенційних зсувів поверхонь тріщин. Проаналізовано вплив ефектів контрастності жорсткостей матеріалів компонент тіла, товщини прошарку та глибин залягання дефектів на міцність тіла.

Література

- [1] Ben-Romdhane M., El-Borgi S., Charfeddine M. An embedded crack in a functionally graded orthotropic coating bonded to a homogeneous substrate under a frictional Hertzian contact // *International Journal of Solid and Structures*, 2013. – 50. – P. 3898–3910.
- [2] Xiao Sh., Yue Zh., Xiao H. Dual boundary element method for analyzing three-dimensional cracks in layered and graded half spaces // *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2019. – 104. – P. 135–147.
- [3] Vasylyshyn A., Sulym H., Pasternak I. Thermomagnetoelasticity of bimaterial solids with high temperature conducting interface and thin internal inhomogeneities // *Structural Integrity*, 2020. – 16. – P. 261–267.
- [4] Panasyuk O. N. Influence of interface conditions on wave propagation in composite laminates // *International Applied Mechanics*, 2014. – 50. – P. 399–405.
- [5] Pramanik D., Manna S. Love-like wave fields at the interface of sliding contact with non-local elastic heterogeneous fluid-saturated fractured poro-viscoelastic layer // *European Journal of Mechanics / A Solids*, 2024. – 107. – P. 1–19.
- [6] Ballard P. Steady sliding frictional contact problem for a 2d elastic half-space with a discontinuous friction coefficient and related stress singularities // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2016. – 97. – P. 225–259.
- [7] Bartolomeo M. Di., Massib F., Baillet L., Culla F., Fregolent A., Berthier Y. Wave and rupture propagation at frictional bimaterial sliding interfaces: From local to global dynamics, from stick-slip to continuous sliding // *Tribology International*, 2012. – 52. – P. 117–131.
- [8] Brener E. A., Weikamp M., Spatschek R., Bar-Sinai Y., Bouchbinder E. Dynamic instabilities of frictional sliding at a bimaterial interface // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2016. – 89. – P. 149–173.
- [9] Andrade H. C., Trevelyan J., Leonel E. D. Direct evaluation of stress intensity factors and T-stress for bimaterial interface cracks using the extended isogeometric boundary element method // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2023. – 127. – P. 1–21.
- [10] Chai H., Lv J., Bao Y. Numerical solution of hypersingular integral equations for stress intensity factors of planar embedded interface cracks and their correlations with bimaterial parameters // *International Journal of Solid and Structures*, 2020. – 202. – P. 184–194.

- [11] *Gu Y., Lin J., Wang F.* Fracture mechanics analysis of bimaterial interface cracks using an enriched method of fundamental solutions: theory and MATLAB code // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2021. – 116. – P. 1–20.
- [12] *Golub M.V., Doroshenko O.V., Fomenko S.I.* Effective spring boundary conditions for modelling wave propagation through a damaged interface between dissimilar orthotropic media // *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2025. – 111. – P. 1–29.
- [13] *Stankevych V. Z., Stankevych O. M.* Acoustic emission in elastic bimaterial with crack under different contact conditions of interface plane // *International Applied Mechanics*, 2024. – 60, № 2. – P. 203–211.
- [14] *Zvizlo I. S., Stankevych N. V.* Torsion crack in a piecewise homogeneous body with a thin layer at the interface // *Materials Science*, 2024. – № 60. – P. 232–239.
- [15] *Stankevich V. Z.* Computation of certain double integrals those are characteristic of dynamic problems of the theory of cracks in a semi-infinite body // *Journal of Mathematical Sciences*, 1996. – 81, № 6. – P. 3048–3052.
- [16] *Kassir M. K., Sih G.C.* Three-dimensional crack problems. Leyden: Noordhoff Int. Publ. 1975. 506 p.

Interaction of torsional cracks through a thin flexible layer in an elastic bimaterial with two half-spaces

Ivan Zvizlo, Nazar Stankevych

A boundary integral formulation is developed to analyze the stress-strain state of an infinite bimaterial containing circular cracks under static torsional loading. A thin flexible layer acts as an interface between the two half-spaces. By applying non-classical contact conditions at the interface, the problem is reduced to a system of 2D boundary integral equations of the Newtonian potential type. These equations are formulated relative to the unknown shear displacement functions on the defect surfaces. By applying non-classical contact conditions at the interface, the problem is reduced to a system of two-dimensional boundary integral equations of the Newtonian potential type. These equations are solved for the unknown shear displacement functions of the defect surfaces.

Отримано 26 02 2026