

DOI: 10.15407/fmmit2025.40.122

Узагальнення задачі Фарадея для механічної системи «резервуар – рідина» при наявності вертикального періодичного двохчастотного збурення

Олександр Константинов¹, Павло Пляс²

¹ст. н. сп., д. ф.-м. н., Інститут математики НАН України, вул. Терещенківська, 3, м. Київ, 01001,
e-mail: akonst.im@ukr.net

²аспірант, Інститут математики НАН України, вул. Терещенківська, 3, м. Київ, 01001,
e-mail: pasha_plyas@ukr.net

Розглянуто узагальнення класичної задачі Фарадея про параметричний резонанс вільної поверхні при вертикальних коливаннях резервуара за періодичним законом з двома кратними частотами. Побудовано області стійкості та нестійкості, які порівнюються з аналогічними результатами для класичної задачі Фарадея. Поведінка системи розглядається на основі нелінійної багатомодової моделі, яка описує сумісний рух резервуару та рідини під впливом зовнішніх силового збудження або кінематичного збурення. Показано, що на відміну від класичного випадку наявність другої частоти призводить до звуження області параметричного резонансу при зростанні амплітуди другої гармоніки зовнішнього вертикального збурення резервуара.

Ключові слова: рухомий резервуар, рідина з вільною поверхнею, задача Фарадея, параметричні коливання, параметричний резонанс, області стійкості.

Вступ. Фарадей у 1831 році в своїй експериментальній роботі [5] вперше встановив умови виникнення та характер розвитку параметричного резонансу вільної поверхні рідини, що частково заповнює резервуар. Циліндричний резервуар, частково заповнений водою, був встановлений на спеціальному лабораторному устаткуванні і мав можливість рухатись у вертикальній площині за заданим гармонічним законом. Результатом експерименту було встановлення Фарадеєм того факту, що для виходу коливань вільної поверхні рідини на режим параметричного резонансу частота зовнішнього вертикального кінематичного збурення руху резервуара повинна бути вдвічі більшою першої власної частоти коливань вільної поверхні рідини. В подальшому в роботі [4] були вперше побудовані області стійкості та нестійкості параметричних коливань системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» в площині параметрів «частота – амплітуда» зовнішнього вертикального кінематичного збурення. Криві, які обмежують області стійкості та нестійкості, є періодичними розв'язками диференціального рівняння Мат'є [1, 3, 10], якщо зовнішнє кінематичне збурення резервуара змінюється у часі за гармонічним законом. У випадку, коли зовнішнє кінематичне збурення резервуара є багаточастотною періодичною функцією, рівняння параметричних коливань механічної системи називають рівнянням Хілла [1, 7]. Хвилі, які виникають на вільній поверхні рідини під дією

параметричного збурення, були названі хвилями Фарадея і досліджувались в [4, 6, 8, 9, 11].

В даній роботі узагальнюється задача Фарадея про умови та особливості розвитку параметричного резонансу в системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею», коли резервуар рухається вертикально за заданим періодичним законом з двома кратними частотами. На основі рівняння Хілла побудовано області стійкості та нестійкості, які порівнюються з аналогічними результатами для класичної задачі Фарадея. Поведінка системи розглядається на основі нелінійної багатомодової (12 форм коливань) моделі [2], яка описує сумісний рух резервуара та рідини під впливом зовнішніх силового збудження або кінематичного збурення. Використана модель побудована на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського.

1. Математична модель механічної системи «циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею».

Розглянемо циліндричний резервуар, частково заповнений рідиною. Резервуар вважаємо абсолютно твердим тілом, яке може рухатись поступально під дією активних зовнішніх сил. Рідину вважаємо ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух безвихровим. Відповідно до методики роботи [2], математична модель механічної системи “резервуар – рідина з вільною поверхнею” будуватиметься на

основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського $\delta I = 0$, де $I = \int_{t_1}^{t_2} L dt$, при

цьому функція Лагранжа задається у класичному вигляді Гамільтона - Остроградського як різниця між кінетичною та потенціальною енергією системи

$$L = \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (\vec{\nabla}_3 \varphi + \dot{\vec{\varepsilon}})^2 d\tau + \frac{1}{2} M_T (\dot{\vec{\varepsilon}})^2 - (M_T + M_F) g \varepsilon_z - \frac{1}{2} \rho g \int_S (\xi^2 - H^2) dS + \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon},$$

де ρ – густина рідини; τ – область, яку займає рідина; r, θ, z – циліндричні координати, при цьому вісь Oz спрямована протилежно вектору прискорення вільного падіння $\vec{g}$, а система координат пов’язана з нерухомим резервуаром;

$\vec{\nabla}_3 = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial z}$; $\vec{\nabla}_2 = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$; φ – потенціал швидкостей рідини; ξ – збурення вільної поверхні; S – поперечний переріз циліндричного резервуара; H – глибина рідини в резервуарі; M_T – маса резервуара; M_F – маса рідини; $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ – вектор переміщення резервуару у поступальному русі; $\vec{F}$ – головний вектор зовнішніх сил, які діють на резервуар, відносно початку координат.

Для ефективного застосування варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського поставлено задачу ввести у розгляд мінімальну кількість незалежних змінних, що описують рух резервуару з рідиною, тобто фактично будуються розклади шуканих змінних, які задовольняють наперед усі кінематичні граничні умови. Оскільки безвихровий рух ідеальної однорідної нестисливої рідини відповідно до теореми Лагранжа повністю визначається рухом її границь, то збурення вільної поверхні

рідини ξ та радіус-вектор $\vec{\varepsilon}(t)$ повністю характеризують рух самої рідини, і тому потенціал швидкостей φ потрібно вважати залежною змінною.

Відповідно до методики роботи [2], розклади шуканих змінних представимо у вигляді

$$\xi(r, \theta, t) = \sum_i a_i(t) \psi_i(r, \theta); \quad \varphi = \sum_i b_i(t) \varphi_i(r, \theta, z),$$

де $a_i(t)$ – амплітуди форм коливань збуреної вільної поверхні рідини ξ . Системи функцій ψ_i і $\varphi_i = \psi_i \frac{\cosh \kappa_i(z+H)}{\kappa_i \sinh \kappa_i H}$ є розв’язком лінійної спектральної задачі [2] та мають вигляд

$$\psi_n(r, \theta) = \frac{J_n\left(\frac{\kappa_n^{(m)}}{R} r\right)}{J_n(\kappa_n^{(m)})} \sin n\theta \quad (n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots),$$

де $\kappa_n^{(m)}$ – корінь кратності n рівняння $J'_n(\kappa_n^{(m)}) = 0$.

У роботі [2] розроблено метод виключення кінематичних граничних умов на вільній поверхні рідини, який дозволяє отримати дискретну модель механічної системи “резервуар – рідина з вільною поверхнею” мінімальної розмірності. На основі розробленого методу, варіаційних методів математичної фізики та асимптотичних методів нелінійної механіки у роботі [2] побудована математична модель, яка дозволяє дослідити поступальні та кутові рухи механічної системи “резервуар – рідина з вільною поверхнею” при різних видах кінематичного збурення та динамічного (силового та моментного) збудження. Ця модель представляє собою систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно незалежних параметрів a_i – коефіцієнтів розкладу в ряд збурення вільної поверхні рідини ξ за формами коливань вільної поверхні ψ_i та ε_i – компонент вектора переміщень центру незбуреної вільної поверхні рідини відносно деякої нерухомої системи відліку:

$$\begin{aligned} \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \beta_{ri}^q + \sum_j a_j \gamma_{rij}^q + \sum_{i,j} a_i a_j \delta_{rijk}^q \right\} + \ddot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i \vec{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{B}_{rijk}^4 \right\} = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j (\gamma_{ijr}^q - 2\gamma_{rij}^q) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k (\delta_{ijk}^q - 2\delta_{rijk}^q) - \frac{1}{2} g \alpha_r^s - g N_r a_r + \\ + \ddot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i (\vec{B}_{ir}^2 - \vec{B}_{ri}^2) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j 2(\vec{B}_{ijr}^3 - \vec{B}_{rij}^3) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k 3(\vec{B}_{ijk}^4 - \vec{B}_{rijk}^4) \right\}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \rho \left\{ \sum_i \ddot{a}_i \left[\vec{B}_i^1 + \sum_j a_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right] \right\} + (M_T + M_F) \ddot{\vec{\varepsilon}} = \\ = \vec{F} - (M_T + M_F) g \vec{k} - \rho \left\{ \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k 2 \vec{B}_{ijk}^3 \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Система (1) – (2) містить $N + 3$ рівнянь (N – кількість форм коливань рідини, що розглядаються) та описує динаміку сумісного руху резервуару та рідини при різних видах кінематичного збурення та динамічного (силового) збудження. Рівняння (1) описують динаміку амплітуд форм коливань вільної поверхні рідини, а рівняння (2) – динаміку резервуара, однак ці рівняння взаємозв'язані та містять сили взаємодії між компонентами механічної системи. Модель отримана аналітично для довільної кількості форм коливань вільної поверхні рідини.

Сукупність коефіцієнтів, які входять до системи рівнянь (1) – (2), у рамках прийнятої моделі визначає властивості механічної системи, яка розглядається, та особливості прояву в ній внутрішніх лінійних та нелінійних механізмів взаємодії. Ці коефіцієнти визначаються через квадратури від розв'язку крайової задачі із визначення форм коливань вільної поверхні рідини. При цьому коефіцієнти $\beta_{ir}^q, \gamma_{ijr}^q, \delta_{ijk}^q, \alpha_r^s, N_r$ відповідають випадку коливань рідини у нерухомому резервуарі, а коефіцієнти $\vec{B}_r^1, \vec{B}_{ri}^2, \vec{B}_{rij}^3, \vec{B}_{rijk}^4$ відображають взаємозв'язок коливань рідини та поступального руху резервуару. Повне отримання системи рівнянь (1) – (2) і формули для обчислення коефіцієнтів для загального випадку сумісного руху (поступального і кутового) руху циліндричного резервуара і рідини з вільною поверхнею наведено у роботі [2].

2. Побудова областей динамічної стійкості та нестійкості при заданому параметричному збуренні руху механічної системи

Рівняння (1) – (2) описують процес розвитку параметричних коливань в механічній системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею», коли система рухається вертикально за заданим періодичним законом. Як відомо із теорії параметричних коливань [1, 3], існують області в площині параметрів вертикального збурення «амплітуда H_z – частота p », коли розв'язки диференціальних рівнянь (1) – (2) будуть необмежено зростати, тобто області динамічної нестійкості. Побудова областей нестійкості буде відповіддю на питання: при яких значеннях параметрів «амплітуда H_z – частота p » зовнішнього кінематичного збурення резервуара система «резервуар – рідина з вільною поверхнею» при наявності будь-якого малого початкового збурення вільної поверхні рідини вийде на режим параметричного резонансу.

Для побудови областей динамічної стійкості та нестійкості запишемо лінеаризоване рівняння для форми з нижчою частотою ω_1 – першої антисиметричної форми a_1 – при наявності зовнішнього вертикального періодичного збурення резервуару ε_z у вигляді

$$\ddot{a}_1 \beta_{11}^q + B_{11}^{2z} \ddot{\varepsilon}_z a_1 + g N_1 a_1 = 0,$$

та перепишемо його в класичній формі рівняння Хілла, тобто

$$\ddot{a}_1 + \omega_1^2 (1 + \nu \ddot{\Phi}_i(t)) a_1 = 0, \quad (3)$$

де зовнішнє вертикальне кінематичне збурення руху резервуара будемо розглядати в двох випадках: в класичній задачі Фарадея

$$\Phi_1(t) = H_1 \cos(pt),$$

в узагальненій задачі Фарадея

$$\Phi_2(t) = H_1 \cos(pt) + H_2 \cos(2pt),$$

і введені позначення $\nu = \frac{B_{11}^{2z}}{gN_1}$, $\omega_1 = \sqrt{\frac{gN_1}{\beta_{11}^q}}$ – власна частота першої антисиметричної

форми a_1 .

Область дійсних характеристичних чисел рівняння (3) співпадає з областю розв'язків, які необмежено зростають. З іншого боку, область комплексних характеристичних чисел відповідає обмеженим (майже періодичним) рішенням. Границям, які розділяють області дійсних та комплексних коренів, відповідають кратні корені, які мають значення 1 або -1. У випадку значення 1 характеристичного

кореня рішення диференціального рівняння буде періодичним з періодом $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$, а

у випадку значення -1 воно буде мати період $2T$.

Таким чином, області необмежено зростаючих розв'язків відокремлюються від областей стійкості періодичними рішеннями з періодом T або $2T$. А саме, два розв'язки одного періоду обмежують область нестійкості, два розв'язки різних періодів – область стійкості. Строге доведення цієї теореми наведено у [3]. З наведеної теореми випливає, що визначення границь областей нестійкості може бути зведено до пошуку умов, при яких диференціальне рівняння (3) має періодичні розв'язки з періодами T або $2T$.

Оскільки існування періодичних розв'язків і можливість їх розкладу у ряд Фур'є є фактом відомим, будемо шукати періодичне розв'язок у вигляді

$$a_1 = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k \cos \frac{kpt}{2} + A_k \sin \frac{kpt}{2} \right),$$

де парним значенням $k = 2, 4, 6, \dots$ відповідають періодичні розв'язок періоду T , а непарним $k = 1, 3, 5, \dots$ – періодичні розв'язок періоду $2T$, причому номер k , яким ми обмежуємося у розкладі (7), означає номер області відповідного параметричного резонансу (зони нестійкості).

Для пошуку границь областей динамічної стійкості та нестійкості з непарними номерами ($k = 1, 3$) шукаємо періодичне розв'язок періоду $2T$ у вигляді

$$a_1 = B_1 \cos \frac{pt}{2} + A_1 \sin \frac{pt}{2} + B_3 \cos \frac{3pt}{2} + A_3 \sin \frac{3pt}{2},$$

яке підставляємо у рівняння (3) та застосуємо метод Гальоркіна: помножуємо рівняння (3) по черзі на всі координатні функції та інтегруємо за періодом $2T$. В результаті отримуємо дві відокремлені системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно значень амплітуд A_1, A_3 та B_1, B_3 , кожна з яких, як відомо з лінійної алгебри, має відмінні від нуля розв'язки тільки у випадку, коли детермінант, складений із коефіцієнтів цієї системи, дорівнює нулю. Прирівнюючи кожен з детермінантів нулю, отримуємо два алгебраїчних рівняння четвертого ступеня, корені яких будуть рівняннями кривих, які розділяють першу та третю області стійкості та нестійкості в площині параметрів (p, H_1) . Розв'язки цих рівнянь для випадку класичної

задачі Фарадея дають рівняння границь області першого резонансу (після розкладу в ряд Тейлора по власній частоті системи ω_1)

$$p = 2\omega_1 - 2\nu\omega_1^3 H_z + \frac{7}{2}\nu^2\omega_1^5 H_z^2 - \frac{51}{8}\nu^3\omega_1^7 H_z^3 + \frac{197}{16}\nu^4\omega_1^9 H_z^4 - \frac{1563}{64}\nu^5\omega_1^{11} H_z^5,$$

$$p = 2\omega_1 + 2\nu\omega_1^3 H_z + \frac{7}{2}\nu^2\omega_1^5 H_z^2 + \frac{51}{8}\nu^3\omega_1^7 H_z^3 + \frac{197}{16}\nu^4\omega_1^9 H_z^4 + \frac{1563}{64}\nu^5\omega_1^{11} H_z^5,$$

та області третього резонансу

$$p = \frac{2}{3}\omega_1 - \frac{1}{54}\nu^2\omega_1^5 H_z^2 - \frac{1}{216}\nu^3\omega_1^7 H_z^3 + \frac{1}{1296}\nu^4\omega_1^9 H_z^4 + \frac{5}{5184}\nu^5\omega_1^{11} H_z^5,$$

$$p = \frac{2}{3}\omega_1 - \frac{1}{54}\nu^2\omega_1^5 H_z^2 + \frac{1}{216}\nu^3\omega_1^7 H_z^3 + \frac{1}{1296}\nu^4\omega_1^9 H_z^4 - \frac{5}{5184}\nu^5\omega_1^{11} H_z^5.$$

Для узагальнення задачі Фарадея під дією збурення $\Phi_2(t)$ рівняння області нестійкості залежать від двох параметрів (H_1, H_2) і для першого та третього параметричного резонансу мають вигляд: для першого резонансу

$$p = 2\omega_1 - 2\nu H_1 \omega_1^3 + \left(\frac{7}{2}\nu^2 H_1^2 + 4\nu^2 H_1 H_2 + 8\nu^2 H_2^2 \right) \omega_1^5,$$

$$p = 2\omega_1 + 2\nu H_1 \omega_1^3 + \left(\frac{7}{2}\nu^2 H_1^2 - 4\nu^2 H_1 H_2 + 8\nu^2 H_2^2 \right) \omega_1^5$$

для третього резонансу

$$p = \frac{2}{3}\omega_1 - \left(\frac{1}{54}\nu^2 H_1^2 + \frac{4}{27}\nu^2 H_1 H_2 + \frac{8}{27}\nu^2 H_2^2 \right) \omega_1^5,$$

$$p = \frac{2}{3}\omega_1 + \left(-\frac{1}{54}\nu^2 H_1^2 + \frac{4}{27}\nu^2 H_1 H_2 - \frac{8}{27}\nu^2 H_2^2 \right) \omega_1^5.$$

Для пошуку границь областей динамічної стійкості та нестійкості з парним номером ($k = 2, 4$) шукаємо періодичне рішення періоду T у вигляді

$$a_1 = B_0 + B_2 \cos pt + A_2 \sin pt + A_4 \sin 2pt,$$

підставляємо у рівняння (3) та застосуємо метод Гальоркіна: помножуємо рівняння (3) по черзі на всі координатні функції та інтегруємо за періодом T . В результаті отримуємо дві відокремлені системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно значень амплітуд A_2, A_4 та B_0, B_2 , кожна з яких має відмінні від нуля розв'язки тільки у випадку, коли детермінант, складений із коефіцієнтів цієї системи, дорівнює нулю. Дорівнюючи кожен з детермінантів нулю, отримуємо два алгебраїчних рівняння четвертого ступеня, корені яких будуть рівняннями кривих, які розділяють другу та четверту області стійкості та нестійкості в площині параметрів (p, H) . Розв'язки цих рівнянь для випадку класичної задачі Фарадея дають рівняння границь області другого резонансу (після розкладу в ряд Тейлора по власній частоті системи ω_1)

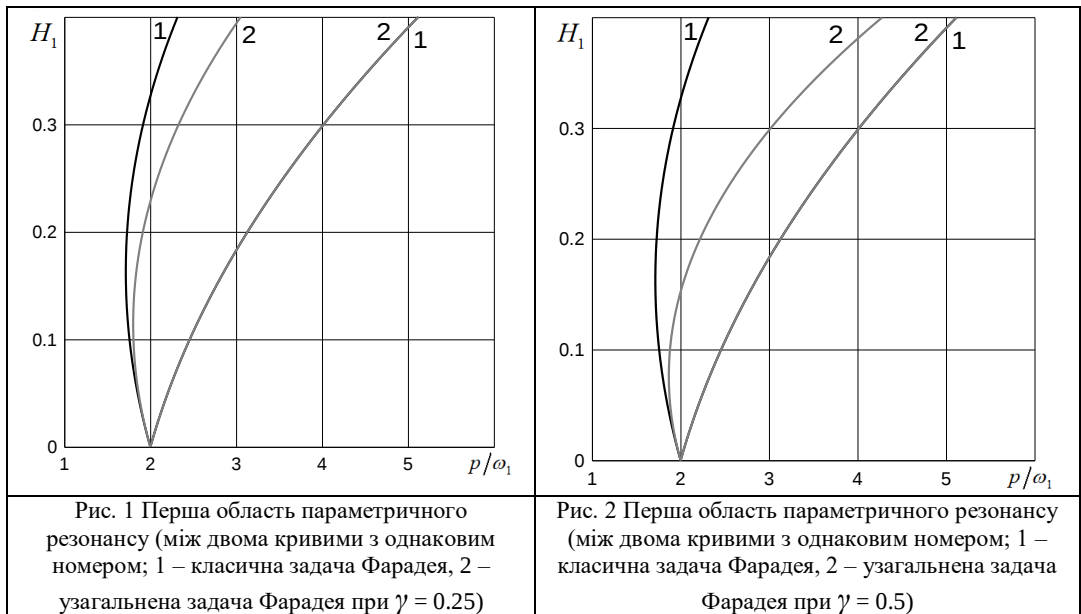
$$p = \omega_1 + \frac{1}{24}\nu^2\omega_1^5 H_1^2 + \frac{5}{3456}\nu^4\omega_1^9 H_1^4 + \frac{25}{248832}\nu^6\omega_1^{13} H_1^6,$$

$$p = \omega_1 - \frac{1}{4} \nu^2 \omega_1^5 H_1^2 + \frac{7}{32} \nu^4 \omega_1^9 H_1^4 - \frac{33}{128} \nu^6 \omega_1^{13} H_1^6,$$

а для узагальненої задачі Фарадея під дією збурення $\Phi_2(t)$ рівняння границь області другого резонансу аналогічно областям з непарними номерами залежать від двох параметрів (H_1, H_2) і мають вигляд

$$p = \omega_1 - \frac{1}{16} \nu H_2 \omega_1^3 + \left(\frac{1}{30} \nu^2 H_1^2 - \frac{5}{2} \nu^2 H_2^2 \right) \omega_1^5,$$

$$p = \omega_1 + \nu H_2 \omega_1^3 + \left(\frac{1}{24} \nu^2 H_1^2 + \frac{3}{2} \nu^2 H_2^2 \right) \omega_1^5,$$



Оскільки рівняння границь областей нестійкості для узагальненого випадку Фарадея (при використанні рівняння Хілла) залежать від двох параметрів (H_1, H_2), для побудови границь цих областей в площині $(\frac{p}{\omega_1}, H_1)$ зафіксуємо амплітуду другої гармоніки зовнішнього збурення як $H_2 = \gamma H_1$, де γ – довільне дійсне значення. Це можна зробити для будь-якого співвідношення між параметрами H_1 і H_2 . На Рис. 1 та 2 побудовано області нестійкості в околі першого параметричного резонансу в площині параметрів $(\frac{p}{\omega_1}, H_1)$ для співвідношень між амплітудами гармонік зовнішнього кінематичного збурення $\gamma = 0.25$ та $\gamma = 0.5$ відповідно. Області нестійкості обмежені кривими з однаковими номерами. При збільшенні γ область нестійкості в узагальненій задачі Фарадея звужується, оскільки зростає вплив другої гармоніки, відбираючи від основної частоти частину енергії.

Висновки. Розглянуто узагальнення класичної задачі Фарадея про параметричний резонанс вільної поверхні при вертикальних коливаннях резервуара. Узагальнюється задача Фарадея про умови та особливості розвитку параметричного резонансу в системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею», коли резервуар рухається вертикально за періодичним законом з двома кратними частотами. На основі рівняння Хілла побудовано області стійкості та нестійкості, які порівнюються з аналогічними результатами для класичної задачі Фарадея. Показано, що на відміну від класичного випадку наявність другої частоти призводить до звуження області параметричного резонансу при зростанні амплітуди другої гармоніки зовнішнього вертикального збурення резервуара.

Література

1. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 600 с.
2. *Лимарченко О.С., Ясинский В.В.* Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. – Киев: НТТУ «КПИ», 1997. – 338 с.
3. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 720 с.
4. *Benjamin T.B., Ursell F.* The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. – Proc. R. Soc. Lond. A. – 1954. – 225 (1163), P. 505–515.
5. *Faraday M.* On the forms and states assumed by fluids in contact vibrating elastic surfaces // Phil. Trans. of the Royal Society of London. – 1831. – 121. – P. 319–346.
6. *Henderson D.M., Miles J.W.* Faraday waves in 2:1 internal resonance // J. Fluid Mech. – 1991. – 222. – P. 449–470.
7. *Hill G.W.* On the Part of the Motion of Lunar Perigee Which is a Function of the Mean Motions of the Sun and Moon // Acta Mathematica. – 1886. – 8. – P. 1–36.
8. *Lewis D. J.* The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes // Proc. Royal Soc. of London. A. – 1950. – 202. – P. 81–96.
9. *Miles J.W.* Note on a parametrically excited trapped cross-wave // J. Fluid Mech. – 1985. – 151. – P. 391–394.
10. *Mathieu E.* Memoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique // J. Math. Pures Appli. – 1868. – 13. – P. 137–203.
11. *Rayleigh J.W.S.* Deep water waves, progressive or stationary, to the third order of approximation // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1915. – 91. – P. 345–353.

Generalization of the Faraday problem for the mechanical system «reservoir – liquid» in the presence of a vertical periodic two-frequency disturbance

Oleksandr Konstantinov, Pavlo Plyas

The generalization of Faraday's classic problem about the parametric resonance of the free surface during vertical oscillations of the tank according to the periodic law of the modulus of the cosine is considered. Regions of stability and instability are designed, which are compared with similar results for the classical Faraday problem. The behavior of the system is considered on the basis of a nonlinear multimode model, which describes the combined movement of the tank and fluid under the influence of external force excitation or kinematic disturbance. It is shown that, unlike the classical case, the presence of the second frequency leads to a narrowing of the parametric resonance region with an increase in the amplitude of the second harmonic of the external vertical disturbance of the reservoir.

Отримано 30.07.25.