

DOI: 10.15407/fmmit2025.40.116

Керування сумісним рухом конструкції з рідиною з вільною поверхнею при запізненні

Вікторія Губська¹, Олег Лимарченко²

¹Ст.викл., к.ф.-м.н., Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут» імені Ігора Сікорського, Україна, 03056, м. Київ, проспект Берестейський, 37, e-mail: viktoriiagubskaia@gmail.com

²Проф., д.т.н., Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, Україна, Київ, проспект академіка Глушкова, 4-е, e-mail: olelim@knu.ua

Розглянуто задачу про керування сумісним рухом конструкції з рідиною з вільною поверхнею в нелінійному діапазоні збурень хвиль на вільній поверхні рідини. Вважається що резервуар має циліндричну форму і частково заповнений ідеальною однорідною нестисливою рідиною. Математична модель системи будується на основі сукупного використання варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського з попереднім виключенням всіх кінематичних обмежень задачі, підходів нелінійної механіки і методу Канторовича. В підсумку це дозволило одержати нелінійну динамічну модель системи у формі звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітуд збурення форм коливань рідини і параметрів поступального руху резервуару. Керування системи здійснюється на основі принципу компенсації силового відгуку рідини на стінки резервуару. Розглянуто випадок керування системою із запізненням, коли керування розпочинається відразу, під час дії активного навантаження і після завершення дія активного навантаження. Встановлені специфічні характеристики керування із запізненням.

Ключові слова: ідеальна рідина, вільна поверхня, конструкція з рідиною, сумісний рух, керування із запізненням.

Вступ. В динаміці твердих тіл з рідиною з вільною поверхнею до теперішнього часу задачі керування рухом системи при значних проявах нелінійностей і сумісності руху складових системи лишаються одними з найменш дослідженими. Відомо, що при вивченні руху систем «рідина – резервуар» в лінійному діапазоні збурень такі задачі є основними при моделюванні руху ракет, літаків, морських суден, цистерн, тощо [1, 3– 6]. Успіх в розв’язанні таких задач обумовлений насамперед достатньо високим рівнем розвитку методів дослідження задач стійкості і керування для лінійних систем. Однак, як тільки ми переходимо до вивчення нелінійних систем, які відповідають значним збуренням вільної поверхні рідини, ситуація змінюється докорінно, і до теперішнього часу такі задачі практично не досліджуються. Це обумовлене тим, що для адекватного опису нелінійних динамічних властивостей рідини з вільною поверхнею треба залучати відносно велику кількість змінних (зазвичай 10-20), і суттєвим проявом нелінійних ефектів. Але дослідження саме такого типу задачі і дотепер практично не розглядається в теорії керування через складність.

Одним із важливих класів задач керування рухом конструкцій з рідиною є задача про мінімізацію впливу рідинного наповнення на рух тіла-носія. Такі задачі є

важливими при потребах високоточного маневрування, наприклад, при монтажі резервуарів з рідиною в безпосередній близькості з іншими важливими елементами технічних систем, при стиковці – відділенні ступенів космічних систем, при швартування суден та інш. Тому ставиться мета розвитку і перевірки на прикладах ефективності нового методу керування придатного для нелінійних систем. Такий метод був вже запропонований на основі принципу компенсації силового відгуку рідини на стінки резервуара [2, 8]. Цей метод виявився ефективним для різних задач збурення руху поодинокими силовими імпульсами чи їх послідовністю.

Проте в реальних системах часто керування рухом починається не відразу, а при певній зміні обставин із затримкою на осмислення оператором проблеми і часу відпрацювання органів керування. Розглянуто специфіку прояву керування із запізненням при початку керування в різних фазах активного руху системи.

1. Формулювання задачі.

Розглянемо задачу про рух системи «абсолютно тверда конструкція – рідина з вільною поверхнею». Конструкція здійснює поступальний рух під дією активних зовнішніх сил. Вважаємо рідину ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух безвихровим. Для числових прикладів у статті розглянуто циліндричний резервуар з вертикальною віссю. Математична модель для рідини описується диференціальними рівняннями в частинних похідних, а рух конструкції – системою звичайних диференціальних рівнянь, що являє собою об'єкт неоднорідної математичної структури. Постановка задачі здійснюється на основі варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad L = T - \Pi; \quad L = \frac{1}{2} \rho \int_V (\vec{\nabla} \varphi)^2 d\tau + \frac{1}{2} M_T (\dot{\varepsilon})^2 - \frac{1}{2} \rho g \int_{S_0} \xi^2 dS - (M_T + M_F) \varepsilon_z g. \quad (1)$$

Тут T і Π кінетична і потенціальна енергія системи. Для безвихрового руху ідеальної рідини швидкість її руху $\vec{v}$ визначається через потенціал швидкості φ за формулою $\vec{v} = \vec{\nabla} \varphi$, де $\varphi = \varphi_0 + \dot{\varepsilon} \cdot \vec{r}$, причому φ_0 відповідає хвильовому руху рідини, а $\dot{\varepsilon} \cdot \vec{r}$ – потенціал швидкості руху рідини, обумовлений сумісним рухом рідини і резервуара, тут $\dot{\varepsilon}$ – поступальна швидкість руху резервуара, $\vec{r}$ – радіус-вектор довільної точки рідини, M_T і M_F маса резервуара і рідини, $z = \xi(x, y, t)$ – рівняння вільної поверхні рідини в циліндричній системі координат, t – час. Відомо, що для результативного використання варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського треба заздалегідь задовільнити всім кінематичним граничним умовам задачі. До таких умов відносяться $\Delta \varphi = 0$ вимога нерозривності потоку, $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ – умова неперетікання через бічні стінки

резервуару, $\frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{\nabla} \xi \cdot [\vec{\nabla} \varphi - \dot{\varepsilon} - \vec{\omega} \cdot \vec{r}] = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \dot{\varepsilon}_z$ – умова неперетікання на вільній поверхні рідини в нелінійній формі. Якщо побудувати форми коливань рідини, то вони задовільняють всім цим вимогам за виключенням того, що вимога неперетікання на вільній поверхні рідини задовільняється лише в рамках лінійної постановки задачі. Надалі на основі методу Канторовича зведемо рух системи конструкція–рідина до

сукупності параметрів руху твердого тіла і амплітудних параметрів руху рідини за формами коливань. Для цього прийнемо такі представлення континуальних змінних $\xi = \sum_n a_n(t) \psi_n(r, \theta)$, $\varphi = \sum_n b_n(t) \psi_n(r, \theta) \frac{\text{ch } \kappa_n(z+H)}{\kappa_n \text{sh } \kappa_n H}$; які задовільняють вказаним вище кінематичним вимогам. Тут $b_n(t)$ амплітудні параметри потенціалу, які за методикою [8] записуються через амплітудні параметри руху вільної поверхні рідини $a_n(t)$; а через κ_n позначені відповідні корені функцій Бесселя. Вибір амплітудних параметрів потенціалу як залежних змінних обумовлений теоремою, що безвихровий рух ідеальної однорідної нестисливої рідини повністю визначається рухом її границь. Саме це дозволяє за незалежні змінні обрати амплітудні параметри збурення форм коливань вільної поверхні рідини (визначають рух вільної поверхні) та параметри поступального рухів конструкції, які визначають рух твердих границь області рідини. Обрані параметри повністю характеризують динаміку системи, оскільки за їх значеннями можна відновити характеристики руху вільної поверхні рідини поле швидкостей рідини, поле тисків.

Розклади шуканих змінних, як було зазначено вище, задовільняють лише лінійній частині кінематичної граничної умови на вільній поверхні рідини. Задоволення цій граничній умові в повному обсязі виконується [7] на основу методу Гальоркіна і методів нелінійної механіки. Це дозволяє знайти залежності

$$b_i = \dot{a}_i + \sum_{n,m} \dot{a}_n a_m \gamma_{nmi}^w + \sum_{n,m,l} \dot{a}_n a_m a_l \delta_{nmli}^w + \sum_{n,m,l,k} \dot{a}_n a_m a_l a_k h_{nmli}^w;$$

виключити залежну змінну $b_n(t)$ (багатоіндексні вирази є квадратурами від форм коливань рідини).

Виключення всіх кінематичних граничних умов задачі фактично є переходом до вільної системи, в якій кількість невідомих задачі збігається з числом ступенів свободи системи. Отже, побудована за такою методикою модель є мінімальною, що створює значні переваги при комп'ютерній реалізації алгоритму і проведенні обчислень. Остаточно на основі рівнянь Лагранжа другого роду для системи незалежних параметрів одержимо таку математичну модель руху системи

$$\begin{aligned} \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \delta_{ir} + \sum_j a_j A_{rij}^3 + \sum_{j,k} a_j a_k A_{rijk}^4 \right\} + \ddot{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\alpha_r^v} \left\{ \bar{B}_r^1 + \sum_i a_i \bar{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \bar{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \bar{B}_{rijk}^4 \right\} = \\ = \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j C_{ijr}^3 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k C_{ijk}^4 + \dot{\varepsilon} \cdot \left[\sum_i a_i \bar{D}_{ir}^2 + \sum_i \dot{a}_i a_j \bar{D}_{ijr}^3 + \sum_i \dot{a}_i a_j a_k \bar{D}_{ijk}^4 \right] + g \frac{N_r}{\alpha_r^v} a_r; \\ \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_i \ddot{a}_i \left(\bar{B}_i^1 + \sum_j a_j \bar{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \bar{B}_{ijk}^3 \right) + \ddot{\varepsilon} = \frac{\bar{F}}{M_F + M_T} + \bar{g} + \frac{\rho}{M_F + M_T} \left(\sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \bar{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \bar{B}_{ijk}^3 \right). \end{aligned}$$

Рівняння руху містять коефіцієнти (індексні вирази), що характеризують динамічну взаємодію в системі, інерціальні і статичні характеристики конструкції, а також зовнішні сили і моменти, що діють на конструкцію. Всі ці коефіцієнти визначаються в квадратурах від форм коливань вільної поверхні рідини [8]. У рівняння також входять механічні характеристики рідини (густина ρ і загальна маса

рідини M_F) і резервуара (маса M_T). Одержана з варіаційної задачі система рівнянь у сукупності відповідає динамічним граничним умовам на вільній поверхні рідини, рівнянням поступального руху конструкції за умови сумісності руху конструкції і рідини. Важливою особливістю системи рівнянь є те, що другі похідні невідомих входять в цю систему лінійно. Це дозволяє зробити аналітично перетворення такої системи до форми Коші і надалі використовувати відомі алгоритми чисельного інтегрування початкових задач.

Визначити силовий відгук рідини на стінки резервуара можна з другої системи рівнянь руху. Якщо записати цю систему у вигляді

$$\ddot{\vec{\varepsilon}} = \frac{\vec{F} + \vec{R}}{M_F + M_T} + \vec{g},$$

де $\vec{F}$ – відповідно, зовнішня сила, що діє на конструкцію, а $\vec{R}$ – головний вектор сил тиску рідини на стінки конструкції, які за варіаційним підходом визначаються автоматично як складова частина техніки варіювання, то з рівнянь руху можна вивести аналітичні вирази для цих параметрів силової взаємодії рідини з конструкцією. Зауважимо, що в літературі з динаміки конструкцій з рідиною така силова взаємодія зазвичай визначається шляхом інтегрування сил тиску рідини на стінках резервуара, що значно складніше і зроблене лише для частинних випадків [1–5]. Тут цей результат одержується автоматично як складова частина техніки варіювання і для більш загального випадку

$$\vec{R} = \rho \left[\left(\sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right) - \sum_i \ddot{a}_i \left(\vec{B}_i^1 + \sum_j a_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right) \right].$$

Визначення параметрів силової і моментної взаємодії конструкції з рідиною в аналітичній формі дозволяє не лише оцінити таку взаємодію кількісно, а й запропонувати нові алгоритми керування рухом конструкцій з рідиною, в яких виключений чи значно послаблений вплив коливань рідини на динаміку руху конструкції. Це робиться шляхом включення силового відгуку рідини на стінки бака з протилежним знаком до керуючої дії. Раніше вже було розглянуто групу задач про силову імпульсну і вібраційну дію на резервуар, дію групи імпульсів. Для всіх випадків таке керування призводило до підсумкового руху конструкції що з високою точністю збігається з випадком руху конструкції, у якій рідина «затверділа». Було також досліджено вплив нелінійностей на такий процес керування. Виявилось, що в разі переходу до лінеаризованого підходу на початковій фазі руху системи виникають значні відхилення від руху квазітвердої системи [7].

2. Приклад руху конструкції з рідиною при керуванні із запізненням.

Розглянемо приклад руху циліндричного резервуару, частково заповненого рідиною (рис. 1). Задача розглядається у сумісній постановці в рамках нелінійної моделі [7]. Резервуар здійснює рух лише вздовж осі Ox . В початковий момент ($t=0$) на резервуар діє сила у вигляді прямокутного імпульсу тривалості $\tau = 0.5$ с і амплітуди $A=4,2$ kN. Розглядається чотири варіанта дії керування як компенсації силового відгуку рідини на стінки резервуара на систему. На рис. 2 приведено закон

зміни часі швидкості руху резервуара. Перший варіант (крива 1) відповідає відсутності керування. І цьому випадку коливання рідини суттєво впливає на рух системи. Другий варіант (крива 2) відповідає керованому руху для випадку, коли керування починається відразу з початком дії імпульсу (час паузи в початку керування відсутній $\tau_p = 0$). В цьому випадку рух системи практично повністю збігається з рухом конструкції з рідиною коли рідина «затверділа», тобто керування практично повністю виключило вплив рухомості рідини на стінки резервуара. Третій варіант (крива 3) відповідає випадку коли керування системою починається на активній ділянці руху через час $\tau_p = \frac{\tau}{2}$, тобто в середині дії силового імпульсу на систему. В цьому випадку подальший рух системи відбувається із швидкістю яку досягла система в момент початку керування із запізненням. Четвертий варіант (крива 4) відповідає випадку коли керування системою починається на ділянці руху системою за інерцією через час $\tau_p = 2\tau$, тобто через час τ після завершення дії силового імпульсу. в середині дії силового імпульсу на систему. Аналогічно з третім випадком в цьому випадку подальший рух системи відбувається із швидкістю яку досягла система в момент початку керування із запізненням.

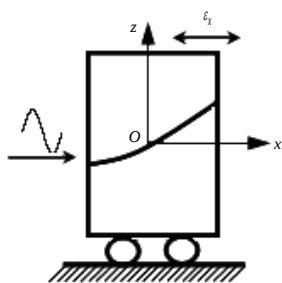


Рис. 1 Схема руху конструкції

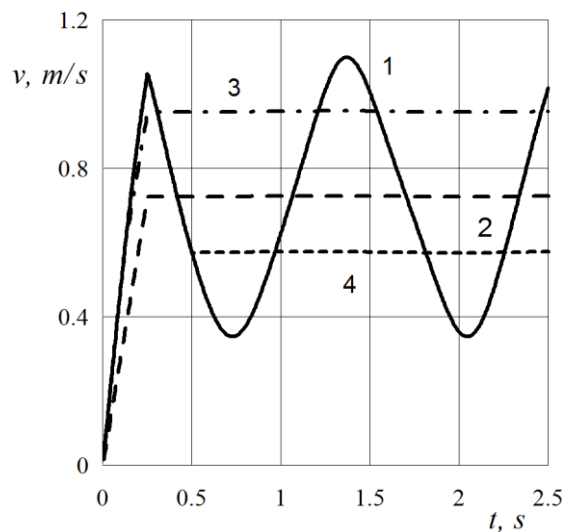


Рис. 2 Зміна швидкості руху резервуара в часі

Висновки. Розглянуто задачу керування рухом конструкції з рідиною з вільною поверхнею. Для задачі керування рухом системи з метою послаблення впливу рідкого наповнення на рух конструкції–носія побудовано алгоритм для реалізації високоточного маневрування на основі принципу компенсації силової взаємодії рідини зі стінками резервуара (силового відгуку рідини). Продемонстровано ефективність такого підходу для задач, коли керування рухом системи відбувається з різними інтервалами затримки. Встановлено, що при керуванні системою з запізненням, яке потрапляє на ділянки як активного руху системи, так і руху системи за інерцією, надалі рух відбувається із швидкістю, яку мала конструкція на момент початку керування. Фактично це відповідає умовним «початковим умовам» при яких

починається керівна дія. При цьому вже подальший рух системи відбувається із швидкістю, яка відрізняється від швидкості руху системи з рідиною що «затверділа». Запропонований підхід базується на аналітичних властивостях нелінійної динамічної моделі сумісного руху конструкції з рідиною і застосовується для вивчення задач, де використання традиційних підходів до розв'язання задач керування рухом є складним і дотепер не здійснювалося.

Література

1. Колесников К.С. Динамика ракет. – М.: Машиностроение, 1980. – 376 с.
2. Константинов А.В., Лимарченко О.С., Лукьянчук В.В., Нефедов А.А. Динамические приемы гашения колебаний в системе «конструкция – жидкость со свободной поверхностью» // Прикл. механика. – 2019. – 55, № 1. – С. 64–77.
3. Микушев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1978. – 247 с.
4. Черноушко Ф.Л., Баничук Н.В. Движение твёрдого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. – М.: Наука, 1973. – 240 с.
5. Черноушко Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. – М.: Физматлит, 2006. – 328 с.
6. Ibrahim R.A. Liquid sloshing dynamics: theory and applications. – Cambridge: Cambridge University Press, 2005. – 950 p.
7. Klimenkov O.L., Konstantinov A.V., Limarchenko O.S. Dynamic methods of damping the oscillation in structure-free-surface fluid system // International Applied Mechanics. – 2023. – 59, 3, P. 324-335,
8. Limarchenko O.S., Matarazzo G. Rotational motion of structures with tanks partially filled with liquid, – FADA Ltd. Kiev, 2003. – 286 p.

Control with delay of combined motion of the structure with the free surfaced liquid

Victoriya Gubs'ka, Oleg Limarchenko

The problem of delay control on a combined motion of the structure with a free surfaced liquid in the nonlinear range of perturbations of surface is considered. It is assumed that the reservoir is of cylindrical shape and it is filled with an ideal homogeneous incompressible liquid. The mathematical model of the system is constructed based on the aggregate use of the Hamilton–Ostrogradsky variational principle with preliminarily elimination of all kinematical restrictions of the problem, approaches of nonlinear mechanics and the Kantorovich method. In the end this enables to get the nonlinear dynamical model of the system in the form of ordinary differential equations with respect to amplitudes of perturbations of normal modes of liquid oscillations and parameter of the reservoir translational motion. The system control is done based on the principle of compensation of the force response of the liquid on reservoir walls. We consider the case of the delayed control, when the control starts immediately, during an active loading and after completion of the active loading. Specific characters of the delayed control were ascertained.

Key words: ideal liquid, free surface, structure carrying liquid, combined motion, control with delay.

Отримано 23.07.22.