

DOI: 10.15407/fmmit2025.40.053

Моделювання та дослідження процесу нагріву вольфрамової панелі за дії квазіусталеного електромагнітного поляРоман Мусій¹, Мирослава Клапчук², Андрій Кунинець³, Любомир Гошко⁴, Інґа Свідрак⁵¹д. ф.-м. н., професор, Національний університет «Львівська політехніка», вул. Ст. Бандери, 12, 79013, Львів, email: roman.s.musii@lpnu.ua²к. ф.-м. н., доцент, Національний університет «Львівська політехніка», вул. Ст. Бандери, 12, 79013, Львів, email: myroslava.i.klapchuk@lpnu.ua³к. ф.-м. н., доцент, Національний університет «Львівська політехніка», вул. Ст. Бандери, 12, 79013, Львів, email: andrii.v.kunynets@lpnu.ua⁴к. ф.-м. н., доцент, Національний університет «Львівська політехніка», вул. Ст. Бандери, 12, 79013, Львів, email: liubomyr.v.goshko@lpnu.ua⁵к. т. н., доцент, Національний університет «Львівська політехніка», вул. Ст. Бандери, 12, 79013, Львів, email: inha.g.svidrak@lpnu.ua

Розглядається неферромагнітна електропровідна панель прямокутного поперечного перерізу за дії квазіусталеного електромагнітного поля. За такої дії у ній виникають нестационарні об'ємно розподілені джерела тепла Джоуля. Для дослідження закономірностей її теплових режимів запропоновано двовимірну фізико-математичну модель, яка складається з двох етапів. На першому етапі зі співвідношень Максвелла визначається дотична до основ панелі компонента вектора напруженості магнітного поля. На другому етапі за знайденою цією компонентою визначається питома густина тепла Джоуля. Для побудови розв'язку задачі електродинаміки використано апроксимацію розподілу визначальної функції по товщинній координаті кубічним поліномом. Коефіцієнти апроксимаційного полінома подаються у вигляді лінійної комбінації інтегральних за товщинною координатою характеристик визначальної функції та заданих її значень на основах панелі. У результаті вихідна двовимірна початково-крайова задача на визначальну функцію зводиться до одновимірної початково-крайової задачі на інтегральні характеристики визначальної функції. Розв'язки одновимірної задачі отримано застосуванням скінченного інтегрального перетворення по поперечній координаті панелі та перетворення Лапласа за часом.

Числові дослідження виконано для вольфрамової панелі за однорідної дії квазіусталеного електромагнітного поля. Проаналізовано теплові режими панелі залежно від параметра, що характеризує відносну глибину проникання індукційних струмів для двох характерних випадків приповерхневого та суцільного нагріву.

Ключові слова: вольфрамова панель, квазіусталене електромагнітне поле, приповерхневий та суцільний нагрів, тепло Джоуля.

Вступ. Розвиток сучасної енергетики потребує впровадження ефективних та енергозберігаючих технологій, здатних забезпечити надійність і довговічність роботи енергетичного обладнання. Одним із ключових напрямів є використання вольфрамових панелей завдяки їхнім унікальним фізико-механічним властивостям — високій температуростійкості, електропровідності та стійкості до агресивних середовищ. Ці панелі знаходять широке застосування в енергетичних системах,

зокрема в електро- та атомній енергетиці, де вони можуть працювати в умовах дії сильних змінних електромагнітних полів.

При термообробці електропровідних елементів конструкцій значну роль відіграє технологія індукційного нагріву. Вона є не лише енергоефективною та екологічно безпечною, але й забезпечує можливість локалізованого, швидкого і контрольованого нагріву таких матеріалів, як вольфрам. Теоретичні основи процесу індукційного нагріву, а також його практичне значення в сучасній електротехніці та теплотехніці докладно викладено в роботах [1, 2]. У [3] проаналізовано фізичні моделі та чисельно-експериментальні підходи до індукційного нагріву електропровідних тіл вихровими струмами, індукованими змінним електромагнітним полем (ЕМП). А в [4] розглянуто моделювання усталених коливань ЕМП у кусково-однорідних середовищах.

Особливої уваги потребує вивчення теплових ефектів у вольфрамових панелях прямокутного поперечного перерізу, які є елементами конструкцій енергетичних систем. При дії змінних, у тому числі квазіусталених ЕМП, у цих елементах виникає тепло Джоуля, що суттєво впливає на температурний і напружений стан матеріалу. Накопичення тепла Джоуля може призводити до термомеханічних деформацій. Тому точне моделювання таких процесів є критично важливим для оцінки роботоздатності вольфрамових елементів в умовах тривалого електромагнітного навантаження.

У літературі [5, 6] переважно розглядаються одновимірні задачі теплового аналізу для однорідних та двошарових електропровідних тіл. Водночас, для точного врахування розподілу тепла Джоуля в смугах і панелях з прямокутним поперечним перерізом, необхідно використовувати двовимірну фізико-математичну модель.

У цій роботі розроблено таку модель для розрахунку компонент векторів напруженостей магнітного та електричного полів, а також для визначення питомої густини тепла Джоуля у вольфрамовій панелі прямокутного перерізу під дією квазіусталеного електромагнітного поля.

Вихідні співвідношення двовимірної фізико-математичної моделі. Розглядається неферромагнітна електропровідна панель прямокутного перерізу, віднесена до Декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$ (рис.1). Початок системи точка O співпадає з центром симетрії прямокутника (точкою перетину його діагоналей). Для термообробки електропровідна панель нагрівається зовнішнім однорідним квазіусталеним ЕМП. Відповідно до явища електромагнітної індукції у панелі виникають індукційні струми, які зумовлюють нагрів панелі теплом Джоуля.

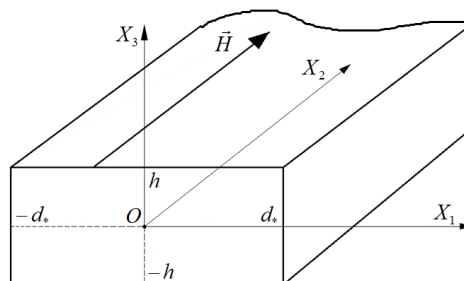


Рис. 1. Електропровідна панель прямокутного поперечного перерізу

Панель виготовлена з однорідного, ізотропного і неферомагнітного матеріалу. Електрофізичні параметри матеріалу вважаються сталими і дорівнюють їх середнім значенням на відповідних інтервалах нагріву.

Вздовж осі Ox_1 відкладається ширина панелі, вздовж осі Ox_2 - довжина панелі, а вздовж осі Ox_3 - товщина. Панель безмежно довга. Її прямокутний поперечний переріз має товщину $2h$ і ширину $2d_*$, де h - півтовщина панелі. Тут розглядаємо безрозмірні координати $x_1 = x/h$, $x_2 = y/h$, $x_3 = z/h$, що дорівнюють Декартовим координатам x, y, z віднесеним до величини h .

Для дослідження закономірностей процесів теплового нагріву панелі сформулюємо двовимірну фізико-математичну модель. Ця модель складається з двох етапів. На першому етапі на основі співвідношень Максвелла визначаємо вектор напруженості магнітного поля $\vec{H}(x_1, x_3, t) = \{0; H_2(x_1, x_3, t); 0\}$. Компонента $H_2(x_1, x_3, t)$ паралельна до всіх чотирьох граней панелі, які описуються виразами: $x_3 = \pm 1$, $x_1 = \pm d$. Тут t - час, $d = d_*/h$ - безрозмірна ширина панелі.

Для визначення компоненти $H_2(x_1, x_3, \tau)$ у розглядуваній панелі на основі співвідношень Максвелла отримуємо рівняння:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) H_2 - \frac{\partial H_2}{\partial \tau} = 0. \quad (1)$$

Тут $\tau = t/(\sigma \mu h^2)$ - безрозмірний час, характерний для дифузії магнітного поля через півтовщину h панелі; σ - коефіцієнт електропровідності, μ - магнітна проникливість матеріалу панелі.

Дія зовнішнього квазіусталеного ЕМП задається значеннями компоненти $H_2(x_1, x_3, t)$ на всіх гранях панелі. Граничні умови для знаходження функції $H_2(x_1, x_3, t)$ записуються виразами:

$$H_2(x_1, \pm 1, \tau) = H_2^{\pm(0)}(x_1, \tau), \quad H_2(\pm d, x_3, \tau) = H_2^{\pm(0)*}(x_3, \tau). \quad (2)$$

Тут $H_2^{\pm(0)}(x_1, \tau)$ і $H_2^{\pm(0)*}(x_3, \tau)$ задані вирази функції $H_2(x_1, x_3, \tau)$ на гранях $x_3 = \pm 1$, $x_1 = \pm d$ панелі.

За відсутності ЕМП у панелі в момент часу $\tau = 0$ початкова умова на функцію $H_2(x_1, x_3, \tau)$ має вигляд:

$$H_2(x_1, x_3, 0) = 0. \quad (3)$$

Необхідно, щоб у кутових точках поперечного перерізу панелі крім граничних умов (2) також виконувались умови узгодження функцій $H_2^{\pm(0)}$ і $H_2^{\pm(0)*}$. Ці умови записуються у вигляді:

$$H_2^{+(0)}(d, \tau) = H_2^{+(0)*}(1, \tau), \quad H_2^{-(0)}(d, \tau) = H_2^{-(0)*}(-1, \tau),$$

$$H_2^{+(0)}(-d, \tau) = H_2^{-(0)*}(1, \tau), \quad H_2^{-(0)}(-d, \tau) = H_2^{-(0)*}(-1, \tau). \quad (4)$$

На другому етапі за знайденою функцією $H_2(x_1, x_3, \tau)$ визначаємо вектор напруженості електричного поля у панелі на основі співвідношення

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma} (\text{rot} \vec{H}). \quad (5)$$

Вектор напруженості електричного поля $\vec{E}$, згідно структури вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}$, має дві відмінні від нуля компоненти, тобто $\vec{E}(x_1, x_3, \tau) = \{E_1(x_1, x_3, \tau); 0; E_3(x_1, x_3, \tau)\}$.

Ці компоненти через функцію $H_2(x_1, x_3, \tau)$ описуються виразами:

$$E_1 = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_2(x_1, x_3, \tau)}{\partial x_3}, \quad E_3 = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_2(x_1, x_3, \tau)}{\partial x_1}. \quad (6)$$

За знайденим виразом вектора $\vec{E}$ напруженості електричного поля питома густина тепла Джоуля описується формулою

$$Q = \sigma \vec{E} \vec{E}. \quad (7)$$

Відповідно до формули (7) вираз тепла Джоуля через функцію $H_2(x_1, x_3, \tau)$ має вигляд:

$$Q = \frac{1}{\sigma} \left[\left(\frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_2}{\partial x_3} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

Побудова розв'язку за дії однорідного квазіусталеного ЕМП. За такої електромагнітної дії значення компоненти $H_2(x_1, x_3, \tau)$ вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}$ на бічних гранях $x_3 = \pm 1$ та $x_1 = \pm d$ панелі задаються виразами:

$$H_2(x_1, \pm 1, \tau) = H_0 \phi(\tau) e^{ib\tau}, \quad H_2(\pm d, x_3, \tau) = H_0 \phi(\tau) e^{ib\tau}. \quad (9)$$

Зауважимо, що при такій структурі умов (9) умови (4) узгодження значень компоненти $H_2(x_1, x_3, \tau)$ вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}$ у кутових точках прямокутного поперечного перерізу, тобто на ребрах панелі, виконуються тотожно.

У виразах (9) функція $\phi(\tau)$ описує вихід електромагнітних коливань частоти ω на усталений синусоїдальний режим зі сталою амплітудою H_0 напруженості магнітного поля. Ця функція задовольняє відомим умовам квазіусталеності ЕМП і має вигляд:

$$\phi(\tau) = 1 - e^{\beta\tau}. \quad (10)$$

У виразах (9) $i = \sqrt{-1}$; $b = 1/(2\delta_0^2)$. Тут $\delta_0 = (2\omega\sigma\mu h^2)^{-1/2}$ - параметр, що визначає відносно до півтовщини панелі h глибину проникання індукційних струмів частоти ω . У виразі (10) параметр $\beta = \ln \varepsilon / \tau_*$, де τ_* - безрозмірний час, що відповідає виходу

електромагнітних коливань частоти ω на усталений режим з амплітудою H_0 ; $\varepsilon = 0.001$.

Розв'язок двовимірної початково-крайової задачі (1)-(4) знаходимо з використанням апроксимації розподілу функції $H_2(x_1, x_3, \tau)$ по товщинній координаті x_3 кубічним поліномом.

У результаті вихідна двовимірна початково-крайова задача на функцію $H_2(x_1, x_3, \tau)$ зводиться до одновимірної початково-крайової задачі на інтегральні характеристики цієї функції. Система рівнянь на інтегральні характеристики $H_{2s}(x_1, t) (s = 1, 2)$ функції $H_2(x_1, x_3, t)$ має вигляд:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) H_{21} - 3H_{22} &= \frac{3}{2} (H_2^+ + H_2^-); \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) H_{22} - 15H_{21} &= \frac{15}{2} (H_2^+ - H_2^-). \end{aligned} \quad (11)$$

Система рівнянь (11) розв'язується з використанням скінченного інтегрального перетворення [7] по змінній x_1 згідно заданих крайових умов (2) на торцевих $x_1 = \pm d$ перетинах панелі. Отримуємо ядро скінченного перетворення у вигляді:

$$K(\alpha_k, x_1) = \frac{\sin \alpha_k (x_1 + d)}{\sqrt{d}}, \text{ де } \alpha_k = \frac{\pi k}{2d}. \text{ Отриману в результаті такого перетворення}$$

систему рівнянь стосовно лише часової змінної τ розв'язуємо з допомогою інтегрального перетворення Лапласа з використанням початкової умови (3).

Після знаходження функції H_2 з використанням формул (7), (8) записуємо вираз питомої густини тепла Джоуля Q як функції від змінних x_1, x_3, τ .

Відповідно до крайових умов (9) вираз для питомої густини тепла Джоуля Q , усередненого за період електромагнітних коливань квазіусталеного ЕМП, має вигляд:

$$Q(x_1, x_3, \tau) = \frac{1}{2} \sigma \varphi^2(\tau) \bar{E} \tilde{E}. \quad (12)$$

Тут $\tilde{E}$ - комплексно спряжений вираз до виразу вектора напруженості електричного поля $\bar{E}$.

Числовий аналіз теплових режимів вольфрамової електропровідної панелі. Дослідження виконано для вольфрамової електропровідної панелі [8] товщиною $2h = 2 \text{ mm}$ і шириною $2d_* = 20 \text{ mm}$, тобто $d = 10$. Проведено чисельні експерименти для індукційного нагріву вольфрамової панелі квазіусталеним ЕМП для двох характерних значень параметра δ_0 :

- 1) $\delta_0 = 0.1$, що відповідає приповерхневому індукційному нагріву
- 2) $\delta_0 = 1$, що відповідає суцільному індукційному нагріву.

Кругова частота електромагнітних коливань у першому випадку дорівнює $\omega_1 = 2,2 \cdot 10^6$ 1/s, що відповідає радіочастотному діапазону. У другому випадку частота дорівнює $\omega_2 = 2,2 \cdot 10^4$ 1/s, що відповідає діапазону промислових частот для суцільного індукційного нагріву електропровідних елементів.

Результати обчислень представлені на рис. 2-5. На рис. 2, 3 приведено залежності тепла Джоуля Q/H_0^2 від безрозмірного часу τ у характерних точках M_1 (0.25d, 0.25), M_2 (0.5d, 0.5), M_3 (0.9d, 0.9) поперечного перерізу панелі. Координати цих трьох точок поперечного перерізу панелі вибрано з міркувань проаналізувати поведінку досліджуваних величин як у внутрішніх точках поперечного перерізу, так і в точках, що наближуються до кутових точок цього перерізу. Зокрема це дає змогу більш точно оцінити поведінку досліджуваних величин для двох характерних режимів індукційного нагріву—приповерхневого та глибинного. Рис. 2 відповідає значенню параметра $\delta_0 = 0.1$, а рис. 3 – значенню $\delta_0 = 1$. Отримано, що часова залежність тепла Джоуля Q/H_0^2 за індукційного нагріву квазіусталеним ЕМП відповідає характеру зміни в часі τ функції $\varphi^2(\tau)$.

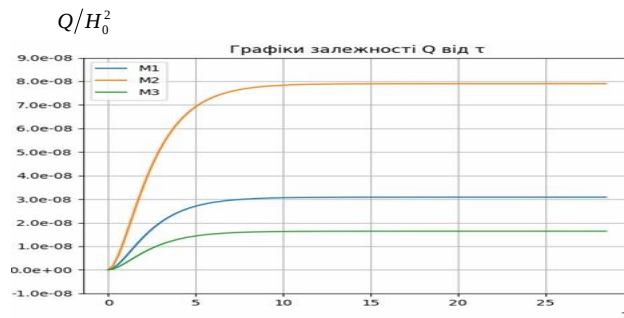


Рис. 2. Залежність тепла Джоуля Q/H_0^2 від безрозмірного часу τ у характерних точках M_1 — M_3 поперечного перерізу вольфрамової панелі у випадку приповерхневого індукційного нагріву (параметр $\delta_0 = 0.1$)

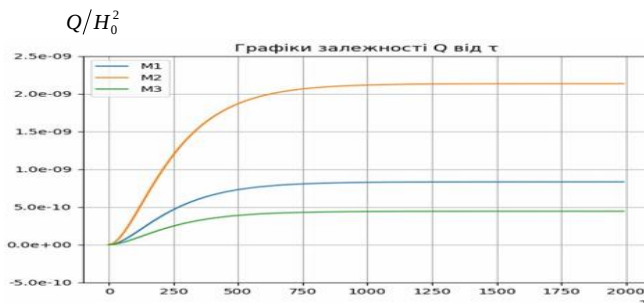


Рис. 3. Залежність тепла Джоуля Q/H_0^2 від безрозмірного часу τ у характерних точках M_1 — M_3 поперечного перерізу вольфрамової панелі у випадку суцільного індукційного нагріву (параметр $\delta_0 = 1$)

На основі аналізу залежностей, приведених на рис. 2 і рис. 3, встановлено, що вихід на усталений режим індукційного нагріву розглядуваної вольфрамової панелі (досягнення максимальних значень тепла Джоуля) відбувається у випадку приповерхневого нагріву в моменти безрозмірного часу $\tau \geq 10$, а у випадку суцільного нагріву в моменти безрозмірного часу $\tau \geq 1000$.

Розподіл тепла Джоуля Q/H_0^2 по площі прямокутного поперечного перерізу вольфрамової панелі в момент часу $\tau=10$ при $\delta_0=0.1$ зображено 3d-графіком на рис. 4, а в момент часу $\tau=1000$ при $\delta_0=1$ - 3d-графіком на рис. 5.

Q/H_0^2

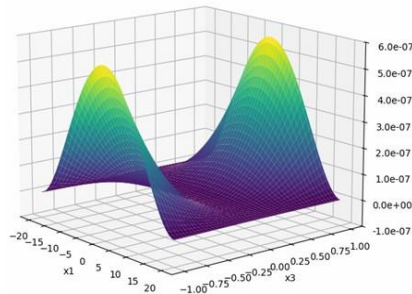


Рис. 4. Розподіл тепла Джоуля Q/H_0^2 по площі поперечного перерізу вольфрамової панелі в моменти часу $\tau \geq 10$ при $\delta_0=0.1$ (приповерхневий індукційний нагрів)

Q/H_0^2

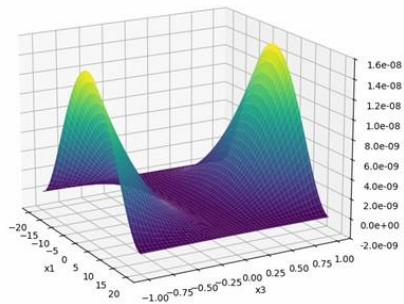


Рис. 5. Розподіл тепла Джоуля Q/H_0^2 по площі поперечного перерізу вольфрамової панелі в моменти часу $\tau \geq 1000$ при $\delta_0=1$ (суцільний індукційний нагрів)

На основі аналізу 3d-графіків, поданих на рис. 4, 5 встановлено, що в усталеному режимі індукційного нагріву розподіл тепла Джоуля Q/H_0^2 по площі поперечного перерізу вольфрамової панелі має однаковий якісний характер в обох розглядуваних режимах індукційного нагріву. Отримано, що максимальні числові значення тепла

Джоуля Q/H_0^2 у випадку приповерхневого індукційного нагріву приблизно у 40 разів більші за такі самі значення у випадку суцільного індукційного нагріву.

Висновки. На основі виконаного числового аналізу тепла Джоуля виявлено такі нові закономірності:

1) при наближенні до кутових точок прямокутника поперечного перерізу панелі значення тепла Джоуля Q/H_0^2 зменшуються як у випадку приповерхневого, так і у випадку суцільного індукційного нагріву;

2) у випадку приповерхневого індукційного нагріву тепло Джоуля виходить на усталений режим в момент часу $\tau \geq 10$, а у випадку суцільного індукційного нагріву – в момент часу $\tau \geq 1000$ за однакової кругової частоти електромагнітних коливань;

3) при зростанні параметра δ_0 у 10 разів безрозмірний час τ_* виходу тепла Джоуля на усталений режим індукційного нагріву зростає у 100 разів;

4) максимальні значення тепла Джоуля Q/H_0^2 зі збільшенням величини H_0 за обох розглядуваних режимів індукційного нагріву зростають за квадратичним законом.

Виявлені закономірності зміни в часі та розподілу по поперечному перерізу вольфрамової панелі тепла Джоуля мають важливе теоретичне і прикладне значення для прогнозування теплових режимів та роботоздатності вольфрамових пластинчастих елементів при їх технологічній обробці з допомогою індукційного нагріву квазіусталеним ЕМП.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Lupi, S. Fundamentals of Electroheat, Electrical Technologies for Process Heating; Springer: Cham, Switzerland, 2017. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-46015-4>
- [2] Rudnev, V.; Loveless, D.; Cook, R. Handbook of Induction Heating; CRC Press: London, UK; Taylor and Francis Group: Abingdon, UK, 2018.
- [3] Bobart, G.F. Induction heating. AccessScience. 2020. Available online: <https://www.accessscience.com/content/article/a341500>
- [4] Гачкевич, О. Р., Мусій, Р. С., Тарлаковський, Д. В. Термомеханіка неферромагнітних електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди. Львів: Сполом.—2011.—211 с.
- [5] Musii, R.; Pukach, P.; Kohut, I.; Vovk, M.; Šlahor, L. Determination and Analysis of Joule's Heat and Temperature in an Electrically Conductive Plate Element Subject to Short-Term Induction Heating by a Non-Stationary Electromagnetic Field. Energies 2022, 15, 5250. <https://doi.org/10.3390/en15145250>
- [6] Musii, R.; Pukach, P.; Melnyk, N.; Vovk, M.; Šlahor, L. Modeling of the Temperature Regimes in a Layered Bimetallic Plate under Short-Term Induction Heating. Energies 2023, 16, 4980. <https://doi.org/10.3390/en16134980>
- [7] Галицын–А.С., Жуковский А.Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. -- Киев: Наукова думка, 1976. -- 283с.
- [8] Thompson M. Base Metals Handbook. – Cambridge: Woodhead Publishing, 2006. – 386 p.

Modelling and investigation of the heating process of a tungsten panel under the action of a quasi-steady-state electromagnetic field

Roman Musii, Myroslava Klapchuk, Andrii Kunynets, Liubomyr Goshko, Inha Svidrak

A nonferromagnetic electroconductive panel of rectangular cross-section is considered under the action of a quasi-steady electromagnetic field. Under such an action, unsteady volumetrically distributed Joule heat sources arise in it. To investigate the regularities of its thermal modes, a two-dimensional physico-mathematical model consisting of two stages is proposed. At the first stage, the tangent component of the magnetic field intensity vector to the panel bases is determined from Maxwell's relations. At the second stage, this component is used to calculate the Joule specific heat density. The solution to the electrodynamics problem is constructed by approximating the distribution of the determining function along the thickness coordinate with a cubic polynomial. The coefficients of the approximation polynomial are represented as a linear combination of the integral characteristics of the determining function along the thickness coordinate and its specified values at the panel bases. As a result, the original two-dimensional initial-boundary value problem for the defining function is reduced to a one-dimensional initial-boundary value problem for the integral characteristics of the defining function. The solutions of the one-dimensional problem are obtained by applying a finite integral transform along the transverse coordinate of the panel using the specified boundary conditions on the determining function at the end sections of the panel and the Laplace transform in time. Numerical studies have been performed for a tungsten panel under the homogeneous action of a quasi-steady electromagnetic field. The thermal modes of the panel are analysed depending on the parameter characterising the relative depth of induction current penetration for two typical cases of near-surface and continuous heating.

Keywords: *tungsten panel, quasi-steady electromagnetic field, near-surface and continuous heating, Joule heat.*

Отримано 05.07.2025