

Задача теплопровідності для півпростору з багатошаровим покриттям за умов нестационарного конвективного нагріву

Віктор Шевчук

д. ф.-м. н., ст. н. с., Інститут прикладних проблеми механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3-б, Львів, 79060, e-mail: shevchuk@iapmm.lviv.ua

На основі застосування математичної моделі з узагальненими граничними умовами теплообміну тіл із середовищем через тонкі шаруваті покриття сформульовано постановку задачі теплопровідності для півпростору з багатошаровим покриттям за умов нестационарного конвективного нагріву при довільній функції температури зовнішнього середовища. Методом інтегрального перетворення Лапласа з використанням інтегрального співвідношення Дюгамеля отримано аналітичний розв'язок цієї задачі та записано конкретні вирази для температури в тілі та шарах покриття у випадках сталої, лінійної, експоненціальної, логарифмічної та періодичної функцій температури довкілля. Проаналізовано вплив умов теплообміну із зовнішнім середовищем на контактну температуру поверхні півпростір–покриття та розподіл температури за просторовою координатою.

Ключові слова: *півпростір, багатошарове покриття, конвективний теплообмін, змінна температура зовнішнього середовища, узагальнена гранична умова, інтегральне перетворення Лапласа.*

Вступ. Значна кількість наукових праць [1–13] стосується моделювання та аналізу процесів теплопровідності в півпросторі з покриттям. При цьому у роботах [1, 2, 5, 6, 10] наведено аналітичні розв'язки нестационарних задач теплопровідності для півпростору з одношаровим покриттям, а у [4, 11] – з багатошаровим покриттям за деяких часткових варіантів часової залежності температури зовнішнього середовища. Водночас більшість досліджень для півпростору з покриттям обмежуються розглядом ситуацій із постійною в часі температурою зовнішнього середовища.

Для наближеного розв'язування задач теплопровідності для тіл з тонкими покриттями ефективним є підхід, який ґрунтується на застосуванні математичної моделі з використанням узагальнених граничних умов (УГУ) теплообміну тіла із середовищем через покриття. Ефективність цього підходу обумовлено тим, що УГУ надають можливість істотно спростити розрахунок теплового стану системи тіло–покриття.

Уперше такі умови було отримано в піонерській роботі [14]. Надалі підхід з використанням УГУ набув подальшого розвитку, зокрема, у працях [15–19, 5, 20–25] для випадку одношарових покриттів, та у працях [26–28, 9, 29, 11, 30, 31] – для багатошарових покриттів.

За допомогою цього підходу у роботі [9] розв'язано задачу теплопровідності для півпростору з багатошаровим покриттям для сталої температури, у [11] – для

температури середовища як кусково-сталої функції часу за конвективного теплообміну, а у [13] – для постійної у часі температури за променево-конвективного теплообміну з навколишнім середовищем.

Нижче проведено узагальнення на випадок довільної функції температури середовища при конвективному нагріві. Детально розглянуто та проаналізовано випадки лінійної, експоненціальної та логарифмічної зміни функції температури зовнішнього середовища.

1. Формулювання задачі

Розглянемо одновимірну задачу теплопровідності для півпростору з n -шаровим покриттям товщини $\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i$ за умов нестационарного конвективного нагріву.

Початок координати $z=0$ розміщено на контактній поверхні покриття з основою, додатний відлік цієї координати спрямовано вглиб півпростору (рис. 1).

В момент часу $\tau=0$ початковий розподіл температури вздовж координати z системи вважаємо відомим і сталим.

Рівняння теплопровідності і початкові умови мають вигляд

$$\frac{\partial t_j}{\partial \tau} = a_j \frac{\partial^2 t_j}{\partial z^2}, \quad (1)$$

$$t_j|_{\tau=0} = t_0 = \text{const}, \quad j = T, 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Приймаємо, що на межі покриття – середовище виконується теплообмін згідно із законом Ньютона

$$\lambda_n \frac{\partial t_n}{\partial z} = \mu(t_n - t_C) \quad \text{при} \quad z = z_n = -\delta, \quad (3)$$

на поверхнях поділу шарів покриття і покриття з тілом мають місце умови ідеального теплового контакту

$$t_j = t_{j-1}, \quad \lambda_j \frac{\partial t_j}{\partial z} = \lambda_{j-1} \frac{\partial t_{j-1}}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = z_{j-1} = -\sum_{m=1}^{j-1} \delta_m, \quad j = 2, \dots, n, \quad (4)$$

$$t_1 = t_T, \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial z} = \lambda_T \frac{\partial t_T}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = z_0 = 0,$$

а також виконується умова

$$t_T \rightarrow t_0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Тут t_i , t_T , t_C – температури i -го шару покриття, тіла і середовища відповідно; δ_i – товщина i -го шару; $a_j = \lambda_j / \omega_j$, λ_j і ω_j – коефіцієнти теплопровідності, теплоємності ($j = T, 1, 2, \dots, n$); μ – коефіцієнт теплообміну між поверхнею покриття і навколишнім середовищем. Індексом i , T та C позначено величини, що відносяться до i -го шару покриття, тіла й середовища відповідно.

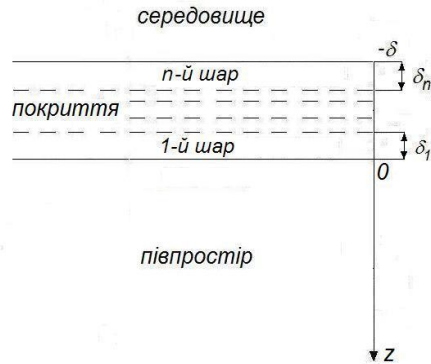


Рис. 1. Схема півпростору з багатошаровим покриттям

2. Розв'язування задачі теплопровідності в півпросторі

Для розв'язування задачі використано підхід, який ґрунтується на моделюванні впливу покриттів на теплоперенос в системі узагальненими граничними умовами [14-31]. Тоді температуру в тілі визначають як розв'язок рівняння (1) для півпростору за початкової умови (2), умови на безмежності (5) та УГУ, яка для цього випадку матиме вигляд [9, 11]

$$\lambda_T \left(1 + \frac{\mu}{H} \right) \frac{\partial t_T(z, \tau)}{\partial z} + \mu (t_C(\tau) - t_T(z, \tau)) = \Omega \frac{\partial t_T(z, \tau)}{\partial \tau}, \quad t_T(z, 0) = t_0 \text{ при } z = 0, \quad (6)$$

де $\Omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \delta_i$, $H^{-1} = \sum_{i=1}^n \delta_i / \lambda_i$ – зведені теплоємність та термоопір покриття.

Розв'язок рівняння (1) у півпросторі в трансформантах Лапласа

$\tilde{t}_T(z, s) = \int_0^{\infty} t_T(z, \tau) e^{-s\tau} d\tau$ з урахуванням умов (2), (5), (6) має вигляд

$$\tilde{t}_T(z, s) = \frac{t_0}{s} + \frac{(s \tilde{t}_C(s) - t_0) \exp(-qz)}{s(1 + \psi s + h^{-1}q)}, \quad (7)$$

де $q = \sqrt{s/a_T}$, s – параметр перетворення Лапласа; $h^{-1} = \lambda_T \left(1 + \frac{\mu}{H} \right) / \mu$, $\psi = \Omega / \mu$,

$\tilde{t}_C(s) = \int_0^{\infty} t_C(\tau) e^{-s\tau} d\tau$ – трансформанта температури середовища.

Оригінал зображення (7) залежить від характеру коренів трансцендентного рівняння $\psi a_T q^2 + h^{-1} q + 1 = 0$.

Використовуючи підхід, викладений у [9, 11], та застосовуючи інтегральне співвідношення Дюгамеля [32, 1], запишемо вирази для температури у півпросторі у вигляді

1°. Для $\Omega \neq 0$ при $1 + \xi \text{Bi} - 2\sqrt{\eta \text{Bi}} \neq 0$

$$\theta_T(\bar{z}, \text{Fo}) = (\theta_C(0) - 1) Z_1(\bar{z}, \text{Fo}) + \int_0^{\text{Fo}} \frac{d\theta_C(\zeta)}{d\zeta} Z_1(\bar{z}, \text{Fo} - \zeta) d\zeta, \quad (8)$$

$$\text{де } Z_1(\bar{z}, \text{Fo}) = \text{erfc} \varphi - \frac{1}{2\Delta} [(1 + \Delta) F_1(\bar{z}, \text{Fo}) - (1 - \Delta) F_2(\bar{z}, \text{Fo})]. \quad (9)$$

2°. Для $\Omega \neq 0$ при $1 + \xi \text{Bi} - 2\sqrt{\eta \text{Bi}} = 0$

$$\theta_T(\bar{z}, \text{Fo}) = (\theta_C(0) - 1) Z_2(\bar{z}, \text{Fo}) + \int_0^{\text{Fo}} \frac{d\theta_C(\zeta)}{d\zeta} Z_2(\bar{z}, \text{Fo} - \zeta) d\zeta, \quad (10)$$

$$\text{де } Z_2(\bar{z}, \text{Fo}) = \text{erfc} \varphi - \frac{2\beta_0}{\sqrt{\pi}} \exp(-\varphi^2) + (\kappa \bar{z} + 2\beta_0^2 - 1) F_3(\bar{z}, \text{Fo}). \quad (11)$$

3°. Для $\Omega = 0$

$$\theta_T(\bar{z}, \text{Fo}) = (\theta_C(0) - 1) Z_3(\bar{z}, \text{Fo}) + \int_0^{\text{Fo}} \frac{d\theta_C(\zeta)}{d\zeta} Z_3(\bar{z}, \text{Fo} - \zeta) d\zeta, \quad (12)$$

$$\text{де } Z_3(\bar{z}, \text{Fo}) = \text{erfc} \varphi - F_4(\bar{z}, \text{Fo}). \quad (13)$$

У формулах (8)–(13) позначено

$$\theta_T = \frac{t_T - t_0}{t_0}, \quad \theta_C = \frac{t_C}{t_0} - \text{безрозмірні температури}; \quad \bar{z} = \frac{z}{z_*} - \text{безрозмірна координата};$$

$$z_* - \text{масштабний параметр}; \quad \text{Fo} = \frac{a_T \tau}{z_*^2} - \text{число Фур'є}; \quad \varphi = \frac{\bar{z}}{2\sqrt{\text{Fo}}};$$

$$F_m(\bar{z}, \text{Fo}) = \exp(q_m \bar{z} + q_m^2 \text{Fo}) \text{erfc}(\varphi + q_m \sqrt{\text{Fo}}), \quad m=1, 2, 3, 4;$$

$$q_1 = (1 - \Delta)\kappa, \quad q_2 = (1 + \Delta)\kappa, \quad q_3 = \kappa, \quad q_4 = \frac{\text{Bi}}{1 + \xi \text{Bi}};$$

$$\Delta = \sqrt{|1 - 4\eta \text{Bi} / (1 + \xi \text{Bi})^2|}; \quad \beta_0 = \kappa \sqrt{\text{Fo}}; \quad \kappa = \frac{1 + \xi \text{Bi}}{2\eta}; \quad \text{Bi} = \frac{\mu z_*}{\lambda_T} - \text{критерій Біо};$$

$$\xi = \frac{H^{-1}}{z_* / \lambda_T} - \text{відносний ефективний термоопір покриття}; \quad \eta = \frac{\Omega}{\omega_T z_*} - \text{відносна}$$

ефективна теплоємність покриття; $\text{erfc} \zeta$ – доповнююча функція помилок.

Можна зауважити, що у випадку відсутності покриття ($\delta = 0$) формула (12) рівносильна розв'язку відповідної задачі теплопровідності для однорідного півпростору [1, с. 314].

3. Визначення температури в покритті

Температура в шарах покриття визначається через граничні значення температури та її похідної в підкладці за формулами відновлення [9, 11, 29, 31]

$$\theta_i(\bar{z}, \text{Fo}) = \theta_T(0, \text{Fo}) + r_i(\bar{z}) \frac{\partial \theta_T}{\partial \bar{z}}(0, \text{Fo}), \quad \bar{z}_i \leq \bar{z} \leq \bar{z}_{i-1}, \quad i=1, \dots, n, \quad (14)$$

$$\theta_i = \frac{t_i - t_0}{t_0}, \quad r_i(\bar{z}) = \lambda_T \left(-\sum_{j=1}^{i-1} \delta_j / (z_* \lambda_j) + (\bar{z} - \bar{z}_{i-1}) / \lambda_i \right), \quad \bar{z}_j = z_j / z_*, \quad j = 0, \dots, n.$$

Підставляючи (8), (10) і (12) в (14), отримуємо вирази для температури в i -му шарі покриття.

1°. Для $\Omega \neq 0$ при $1 + \xi \text{Bi} - 2\sqrt{\eta \text{Bi}} \neq 0$

$$\theta_i(\bar{z}, \text{Fo}) = (\theta_C(0) - 1) \chi_{i,1}(\bar{z}, \text{Fo}) + \int_0^{\text{Fo}} \frac{d\theta_C(\zeta)}{d\zeta} \chi_{i,1}(\bar{z}, \text{Fo} - \zeta) d\zeta. \quad (15)$$

2°. Для $\Omega \neq 0$ при $1 + \xi \text{Bi} - 2\sqrt{\eta \text{Bi}} = 0$

$$\theta_i(\bar{z}, \text{Fo}) = (\theta_C(0) - 1) \chi_{i,2}(\bar{z}, \text{Fo}) + \int_0^{\text{Fo}} \frac{d\theta_C(\zeta)}{d\zeta} \chi_{i,2}(\bar{z}, \text{Fo} - \zeta) d\zeta. \quad (16)$$

3°. Для $\Omega = 0$

$$\theta_i(\bar{z}, \text{Fo}) = (\theta_C(0) - 1) \chi_{i,3}(\bar{z}, \text{Fo}) + \int_0^{\text{Fo}} \frac{d\theta_C(\zeta)}{d\zeta} \chi_{i,3}(\bar{z}, \text{Fo} - \zeta) d\zeta. \quad (17)$$

Тут $\chi_{i,m}(\bar{z}, \text{Fo}) = Z_m(0, \text{Fo}) + r_i(\bar{z}) \bar{Z}_m(\text{Fo})$, $m = 1, 2, 3$,

$$\bar{Z}_1(\text{Fo}) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [Z_1(\bar{z}, \text{Fo})]_{\bar{z}=0} = \frac{(1 - \Delta) q_2 F_2(0, \text{Fo}) - (1 + \Delta) q_1 F_1(0, \text{Fo})}{2\Delta},$$

$$\bar{Z}_2(\text{Fo}) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [Z_2(\bar{z}, \text{Fo})]_{\bar{z}=0} = 2\kappa\beta_0 (\beta_0 F_3(0, \text{Fo}) - 1/\sqrt{\pi}),$$

$$\bar{Z}_3(\text{Fo}) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [Z_3(\bar{z}, \text{Fo})]_{\bar{z}=0} = -\frac{\text{Bi}}{1 + \xi \text{Bi}} F_4(0, \text{Fo}).$$

4. Розв'язки для деяких законів зміни температури середовища

Розглянемо наступні закони зміни температури середовища.

Лінійна функція зміни температури зовнішнього середовища:

$$\theta_C(\text{Fo}) = \theta_C(0) + \text{PdFo}, \quad (18)$$

$$\text{де} \quad \text{Pd} = \left(\frac{d\theta_C(\text{Fo})}{d\text{Fo}} \right)_{\max} \quad (19)$$

– критерій Предводителя [1], що характеризує інтенсивність підвищення температури середовища.

Експоненціальна функція зміни температури зовнішнього середовища:

$$\theta_C(\text{Fo}) = \theta_C^m - (\theta_C^m - \theta_C(0)) e^{-\frac{\text{Pd}}{\theta_C^m - \theta_C(0)} \text{Fo}}, \quad (20)$$

де θ_C^m – безрозмірне значення максимальної температури середовища.

Логарифмічна функція зміни температури зовнішнього середовища:

$$\theta_C(Fo) = \theta_C(0) + k \ln \left(1 + \frac{Pd}{k} Fo \right), \quad (21)$$

де k – деяка стала.

Періодична функція зміни температури зовнішнього середовища:

$$\theta_C(Fo) = \theta_C(0) + \theta_a \sin \left(\frac{Pd}{\theta_a} Fo \right). \quad (22)$$

У цьому випадку $\theta_a = t_a/t_0$, де t_a – амплітуда коливання температури середовища, а критерій Предводителя (19) прямо пропорційний частоті коливань.

Підстановка законів (18), (20)-(22) у формули (8), (10), (12), (15)-(17) дає змогу отримати конкретні вирази для температури у півпросторі та покритті.

5. Випадок сталої температури зовнішнього середовища

У випадку сталої температури навколишнього середовища $t_C(\tau) = t_C = \text{const}$ формули (8)-(17) збігаються з відповідними формулами в [9] за врахування співвідношення $\theta_j = (\theta_C - 1)\tilde{\theta}_j$, $(j = T, 1, 2, \dots, n)$, де $\theta_j = (t_j - t_0)/t_0$, $\tilde{\theta}_j = (t_j - t_0)/(t_C - t_0)$ – безрозмірні температури, що використовуються у цій статті та роботі [9] відповідно.

6. Числові результати та їх аналіз

Безрозмірними вихідними параметрами задачі є: просторова координата $\bar{z}$, час – число Фур'є Fo , ефективний термоопір покриття ξ , ефективна теплоємність покриття η , критерій Біо Bi , критерій Предводителя Pd . Запис розв'язку в критеріальній формі (8), (10), (12) дав змогу здійснити параметричний аналіз впливу ефективних властивостей покриття ξ та η і критерію Bi на перебіг теплового процесу в тілі [9]. Для аналізу впливу умов нестационарного нагріву зовнішнім середовищем подамо розв'язок задачі через критерій Предводителя для різних законів зміни температури довкілля. Для цього конкретизуємо формули (8), (15) для випадків лінійного (18), експоненціального (20) та логарифмічного (21) законів зміни температури зовнішнього середовища для найзагальнішого випадку при $\Omega \neq 0$, $1 + \xi Bi - 2\sqrt{\eta Bi} \neq 0$.

Лінійна функція зміни температури зовнішнього середовища:

$$\theta_T(\bar{z}, Fo) = (\theta_C(0) - 1)Z_1(\bar{z}, Fo) + Pd \int_0^{Fo} Z_1(\bar{z}, \zeta) d\zeta, \quad (23)$$

$$\theta_i(\bar{z}, Fo) = (\theta_C(0) - 1)\chi_{i,1}(\bar{z}, Fo) + Pd \int_0^{Fo} \chi_{i,1}(\bar{z}, \zeta) d\zeta. \quad (24)$$

Експоненціальна функція зміни температури зовнішнього середовища:

$$\theta_T(\bar{z}, Fo) = (\theta_C(0) - 1) Z_1(\bar{z}, Fo) + Pd \int_0^{Fo} e^{-\frac{Pd}{\theta_C^m - \theta_C(0)}(Fo - \zeta)} Z_1(\bar{z}, \zeta) d\zeta, \quad (25)$$

$$\theta_{i,1}(\bar{z}, Fo) = (\theta_C(0) - 1) \chi_{i,1}(\bar{z}, Fo) + Pd \int_0^{Fo} e^{-\frac{Pd}{\theta_C^m - \theta_C(0)}(Fo - \zeta)} \chi_{i,1}(\bar{z}, \zeta) d\zeta. \quad (26)$$

Логарифмічна функція зміни температури зовнішнього середовища:

$$\theta_T(\bar{z}, Fo) = (\theta_C(0) - 1) Z_1(\bar{z}, Fo) + k \int_0^{Fo} \frac{Z_1(\bar{z}, \zeta)}{Fo - \zeta + k / Pd} d\zeta, \quad (27)$$

$$\theta_{i,1}(\bar{z}, Fo) = (\theta_C(0) - 1) \chi_{i,1}(\bar{z}, Fo) + k \int_0^{Fo} \frac{\chi_{i,1}(\bar{z}, \zeta)}{Fo - \zeta + k / Pd} d\zeta. \quad (28)$$

Також, для порівняння результатів запишемо вираз для контактної температури на поверхні півпростір–покриття у випадку *сталой температури зовнішнього середовища*, який випливає з формули (23) при $Pd = 0$:

$$\theta_T(0, Fo) = (\theta_C(0) - 1) Z_1(0, Fo). \quad (29)$$

На основі отриманих формул (23)-(29) проведемо дослідження впливу умов нестационарного нагрівання для різних законів зміни температури навколишнього середовища.

На рис. 2 показано залежність контактної температури на поверхні півпростір – покриття та температури зовнішнього середовища для сталої, лінійної (18), експоненціальної (20) і логарифмічної (21) функцій зміни температури довкілля від часу (рис. 2а) та параметра Pd (рис. 2б). Розрахунки проведено при $\xi = 0.1$, $\eta = 0.1$, $\theta_C^m = 2$, $k = 1$ та $Bi = 1$, $Pd = 4$ для рис. 2а і $Bi = 4$, $Fo = 0.05$ для рис. 2б. При цьому для випадків лінійної, експоненціальної та логарифмічної функцій зміни температури довкілля приймалось $\theta_C(0) = 1$, а для сталої $\theta_C(0) = 2$. Ці рисунки ілюструють вплив умов теплообміну з середовищем на характер зміни максимальної температури в півпросторі на поверхні контакту з покриттям.

З них бачимо, що зі збільшенням часу – числа Fo (рис. 2а) та швидкості підвищення температури середовища – критерію Предводителя Pd (рис. 2б) зростає максимальне значення контактної температури та збільшується різниця в значеннях температури для різних законів зміни температури зовнішнього середовища. В той же час зменшується відхилення значень контактної температури для розглянутих функцій (лінійної, експоненціальної та логарифмічної) від відповідних значень у випадку сталої температури середовища.

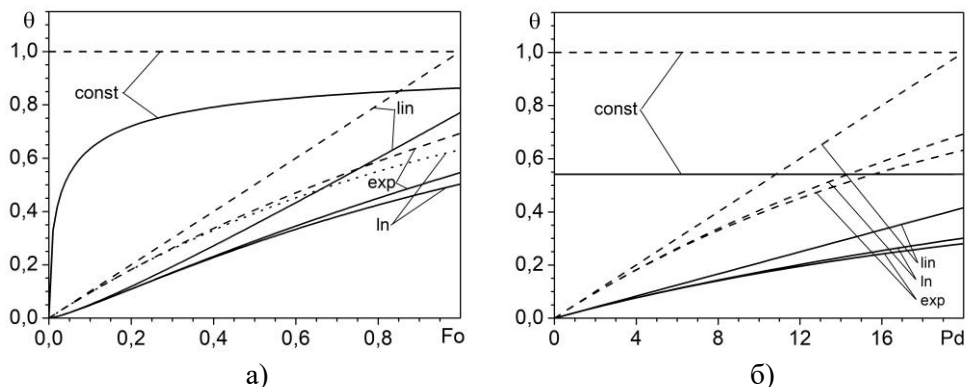


Рис. 2. Залежність контактної температури $\theta = \theta_T(0, Fo)$ на поверхні півпростір–покриття (суцільні криві) та температури зовнішнього середовища $\theta = \theta_C(Fo) - 1$ (штрихові криві) для різних законів теплообміну з середовищем від: а) часу; б) критерію Предводителя

На рис. 3 показано розподіл температури за просторовою координатою $\bar{z}$ у системі півпростір–тришарове покриття для моменту часу $Fo = 0.5$ залежно від зростання швидкості підвищення температури середовища (що відповідає збільшенню критерію Предводителя) для різних законів зміни температури довкілля за таких співвідношень геометричних і теплофізичних параметрів шарів покриття: $\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = 3 : 1 : 1$, $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 3 : 10 : 2$, $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 3 : 6 : 1$ при $\lambda_T / \lambda_1 = 10$, $\omega_T / \omega_1 = 1$, $k = 1$, $Bi = 1$, $\delta / z_* = 0.01$.

Можна зауважити, що при більших значеннях Pd розподіл температури за товщиною покриття більше відхиляється від рівномірного.

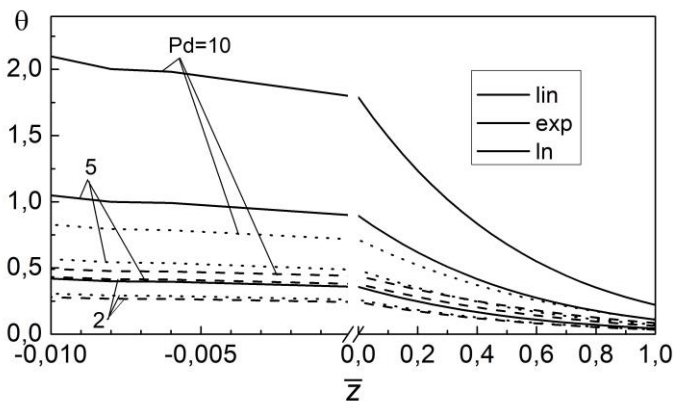


Рис. 3. Розподіл температури в системі основа–багат шарове покриття для різних законів теплообміну з середовищем при деяких значеннях критерію Предводителя

Висновки. Аналітичний розв'язок задачі теплопровідності для півпростору з багат шаровим покриттям при нестационарному конвективному нагріві за довільного закону зміни температури зовнішнього середовища отримано на основі математичної моделі з узагальненими граничними умовами теплообміну із

застосуванням інтегрального перетворення Лапласа та інтегрального співвідношення Дюгамеля. Наведено явні вирази для температурних полів у випадках, коли температура навколишнього середовища змінюється за лінійним, експоненціальним, логарифмічним або періодичним законом. Проведено аналіз впливу умов теплообміну із зовнішнім середовищем на контактну температуру в зоні розділу півпростір – покриття. Встановлено, що інтенсивність зростання температури зовнішнього середовища суттєво впливає на рівень температур і температурні градієнти в системі. Одержані формули можуть надалі використовуватись при проведенні розрахунків термонапруженого стану півпростору з багат шаровим покриттям при різних режимах нагрівання за довільної функції температури довкілля.

Література

- [1] Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
- [2] Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
- [3] Rizk A.A., Erdogan F. Cracking of coated materials under transient thermal stresses // J. Therm. Stresses. – 1989. – **12**, No. 2. – P. 125–168.
- [4] Choi H.J., Jin T.E., Lee K.Y. Transient thermal stresses in a clad semi-infinite medium containing an underclad crack // J. Therm. Stresses. – 1995. – **18**, No. 3. – P. 269–290.
- [5] Attetkov A.V., Vlasov P.A., Volkov I.K. Temperature field of a half-space with a thermally thin coating in pulse modes of heat exchange with the environment // J. Eng. Phys. Thermophys. – 2001. – **74**, No. 3. – P. 647–655.
- [6] Ciavarella M., Decuzzi P., Tagarielli V.L., Dermelio G.P. Simple formulas for thermoelastic stresses in TBC coatings // J. Therm. Stresses. – 2003. – **26**, No. 5. – P. 409–422.
- [7] Zhang S., Liu Z. An analytical model for transient temperature distributions in coated carbide cutting tools // Int. Commun. Heat Mass Transf. – 2008. – **35**, No. 10. – P. 1311–1315.
- [8] Belyakov N.S. Singular integral transforms for heat transfer problems in semi-infinite solids with coatings // Heat Mass Transf. – 2010. – **46**, No. 3. – P. 355–364.
- [9] Shevchuk V.A. Analytical solution of nonstationary heat conduction problem for a half-space with a multilayer coating // J. Eng. Phys. Thermophys. – 2013. – **86**, No. 2. – P. 450–459.
- [10] Сулим Г.Т., Колодій Ю.О., Турчин І.М. Квазістатичні напруження в півпросторі з покриттям при змішаних умовах нагрівання // Вісн. Тернопільськ. нац. техн. ун-ту. – 2015. – **77**, № 1. – С. 71–79.
- [11] Shevchuk V.A., Gavris' A.P. Nonstationary heat-conduction problem for a half-space with a multilayer coating upon cyclic change in the ambient temperature // J. Eng. Phys. Thermophys. – 2020. – **93**, No. 6. – P. 1489–1497.
- [12] Yevtushenko A., Topczewska K., Zamojski P. Use of functionally graded material to decrease maximum temperature of a coating–substrate system // Materials – 2023. – **16**, No. 6. – P. 2265. –19 p.
- [13] Shevchuk V. Nonstationary thermoelastic problem for a multilayer coating/half-space assembly at radiative and convective loading // In: Advances in Mechanics. Advanced Structured Materials / Guz A.N., Altenbach H., Bogdanov V., Nazarenko V.M. (eds). – Cham: Springer, 2023. – Vol. 191. – P. 487–501.
- [14] Подстригач Я.С., Шевчук П.Р. Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1967. – Вып. 7. – С. 227–233.
- [15] Иващук Д.В. Исследование теплодиффузионных процессов и напряженного состояния в телах с покрытиями: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Львов, 1978. – 16 с.
- [16] Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Семерак М.М. Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов. – К.: Наук. думка, 1981. – 344 с.
- [17] Флейшман Н.П. Математичні моделі теплового спряження середовищ із тонкими чужорідними прошарками або покриттями // Вісн. Львівськ. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1993. – Вип. 39. – С. 30–34.
- [18] Kolyano Yu.M., Khomyakevich M.E. Generalized heat conduction in coated bodies that accounts for the coating curvature // J. Eng. Phys. Thermophys. – 1993. – **65**, No. 6. – P. 1251–1256.
- [19] Al-Nimr M.A., Alcam M.K. A generalized thermal boundary condition // Heat Mass Transf. – 1997. – **33**, No. 1–2. – P. 157–161.

- [20] Moulton D., Pelesko J.A. Thermal boundary conditions: an asymptotic analysis // Heat Mass Transf. – 2008. – **44**, No. 7. – P. 795–803.
- [21] Шевчук В.А. До побудови узагальнених граничних умов конвективного теплообміну тіл із середовищем через тонкі неплоскі покриття // Доп. НАН України. – 2011. – № 7. – С. 76–82.
- [22] Chen X., Pond C., Wang X. Effective boundary conditions resulting from anisotropic and optimally aligned coatings: the two dimensional case // Arch. Rational Mech. Anal. – 2012. – **206**, No. 3. – P. 911–951.
- [23] Li H. Effective boundary conditions of the heat equation on a body coated by functionally graded material // Discrete Cont. Dyn.Sys. A. – 2016. – **36**, No. 3. – P. 1415–1430.
- [24] Gera B., Kovalchuk V., Dmytruk V. Temperature field of metal structures of transport facilities with a thin protective coating // Math. Modeling Comp. – 2022. – **9**, No. 4. – P. 950–958.
- [25] Чапля Є.Я., Гера Б.В., Ковальчук В.В. Задача теплопровідності для складеного тіла з елементами різної вимірності // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2023. – **66**, № 3-4. – С. 72–85.
- [26] Шевчук В.А. Обобщенные граничные условия теплообмена тела со средой через многослойное тонкое покрытие // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1995. – Вып. 38. – С. 116–120.
- [27] Шевчук В., Гавриць О., Шевчук П. Нелінійна крайова задача радіаційно-конвективного теплообміну тіл з багат шаровими покриттями // Машинознавство. – 2010. – **46**, №6. – С. 35–41.
- [28] Гембара Н., Лучко Й. Моделювання теплопровідності оболонок з двостороннім багат шаровим покриттям // Вісн. Терноп. нац. техн. ун-ту. – 2013. – **69**, № 1. – С. 222–230.
- [29] Шевчук В.А. Узагальнені граничні умови радіаційно-конвективного теплообміну тіл зі середовищем через багат шарові неплоскі покриття // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – **62**, № 2. – С. 82–97.
- [30] Семерак В., Лучко Й., Пономаренко О., Косарчин В. Визначення температури в круглій пластині з багат шаровими покриттями // Вісн. Львівськ. нац. ун-ту природокористування. Серія Агроінженерні дослідження. – 2021. – № 25. – С. 120–126.
- [31] Шевчук В.А. Методологія дослідження термонапруженого стану тіл із тонкими багат шаровими покриттями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2021. – **64**, № 3. – С. 41–54.
- [32] Беляев М.М., Рядно А.А. Математические методы теплопроводности. – К.: Вища шк., 1993. – 415 с.

The heat conduction problem for a half-space with a multilayer coating under nonstationary heating

Victor Shevchuk

Based on the mathematical model with generalized boundary conditions of heat exchange of the bodies with ambient medium via thin multilayer coatings, the statement of heat conduction problem for a half-space with a multilayer coating under nonstationary heating at the arbitrary function of temperature of ambient medium is formulated. Applying the method of Laplace integral transformation with the use of Duhamel integral relation, we obtain an analytical solution of this problem and write the specific expressions for temperature in body and coating's layers for the cases of linear, exponential, logarithmic, and periodic functions of temperature of ambient media. The influence of heat exchange condition with ambient medium on the contact temperature and temperature distribution across the spatial coordinate is analyzed.

Отримано 2.07.2025