

Аналіз h-адаптивного методу скінченних елементів в задачі статички циліндричних оболонок: І. Коректність осесиметричного варіаційного формулювання

Георгій Шинкаренко¹, Павло Малашняк²

¹професор Львівського національного університету імені Івана Франка, Львів,

²аспірант Львівського національного університету імені Івана Франка, Львів,

¹heorhiy.shynkarenko@lnu.edu.ua, ²pavlo.malashnyak@lnu.edu.ua

Дана стаття присвячена встановленню коректності крайових задач статички оболонок Тимошенка та апроксимації їх розв'язків методом скінченних елементів (МСЕ) із заздалегідь гарантованою точністю наближення. У першій частині цього дослідження для цієї моделі оболонок встановлено: (i) достатні (і цілком придатні для практики) умови розв'язності варіаційного формулювання крайової задачі статички циліндричної оболонки під дією осесиметричних навантажень; (ii) структуру векторів жорстких зміщень такої оболонки; (iii) критерій сингулярної збуреності крайової задачі. У другій частині запропоновано (iv) апостеріорний оцінювач похибок (АОП) кусково-лінійних апроксимацій МСЕ вектора узагальнених зміщень оболонки; (v) стратегію локального згущення сіток для економного обчислення наближень МСЕ із заздалегідь заданим рівнем допустимої похибки. Ефективність і надійність створеної ітераційної процедури h-адаптивного відшукування апроксимацій ілюструється числовими результатами аналізу розв'язків модельних задач, зокрема, в порівнянні з традиційним рівномірним згущенням сіток.

Вступ. З огляду на різноманітність інженерних застосувань теорія оболонок забезпечує перенесення аналізу тривимірних тонкостінних елементів деформівних пружних конструкцій до їхніх двовимірних моделей, побудованих на трактуванні малості їх товщини, наприклад, згідно гіпотез Кірхгофа-Лява [1-4], Тимошенка [5-9] та інших, див. напр. [10,11]. На перший погляд такі моделі з неявною інтерпретацією третього виміру об'єкта аналізу значно спрощують алгоритми наближених обчислень, проте можуть суттєво збільшувати вимоги щодо регулярності шуканих наближень (гіпотези Кірхгофа-Лява) та/або привести до збільшення загальної кількості невідомих (гіпотези Тимошенка). Модель оболонки Тимошенка у варіаційному формулюванні допускає пошук апроксимацій вектора узагальнених пружних зміщень, компоненти якого є лише інтегровані з квадратом в області визначення разом із своїми узагальненими похідними першого порядку (функції з простору Соболева першого порядку). Цей ключовий факт стосовно вимог регулярності шуканих розв'язків дозволяє вживати для обчислень апроксимацій навіть найпростіші кусково-лінійні базисні функції МСЕ і приваблює дослідників тонкостінних конструкцій до вибору моделі Тимошенка, див. [10,12,13]. Поряд із цим лишаються актуальними питання розв'язності варіаційних задач цієї моделі оболонок, неперервної залежності від даних задачі їхніх розв'язків та стійкості їхніх наближень, див. напр. [4,10,14].

Проте для ефективного використання моделі Тимошенка важливо враховувати також низку суттєвих аспектів, що впливають на її практичне застосування. Зокрема, хоча модель забезпечує зниження вимог до регулярності шуканих розв'язків, це досягається за рахунок зростання кількості невідомих, що може значно ускладнити алгоритми чисельного аналізу, особливо для конструкцій із складними геометричними чи фізико-механічними характеристиками. Це, у свою чергу, вимагає ретельного вибору методів апроксимації та адаптації обчислювальних схем для забезпечення коректності та збіжності чисельних розв'язків.

Підсумовуючи вищезгадані обставини метою першої частини цього дослідження було знайти достатні умови коректності варіаційних задач моделі оболонок Тимошенка за різноманітних крайових та розподілених навантажень та встановити критерії їхньої сингулярної збуреності. Щоб виявити важливі деталі цього аналізу нижче ми обмежуємося випадком аналізу лінійної осесиметричної крайової задачі для циліндричної оболонки, формулювання якої подано в п. 1. Розгорнутий матричний запис рівнянь рівноваги в термінах компонент узагальнених зміщень оболонки демонструє специфіку їхнього взаємозв'язку виродженою кососиметричною матрицею, коефіцієнти якої залежать від геометричних та пружних характеристик оболонки. Тут же з огляду на можливу сингулярну збуреність рівнянь рівноваги ми обчислюємо власні числа, число обумовленості, значення визначника матриці закону Гука та наводимо її спектральне розвинування, яке нам знадобиться для аналізу варіаційного рівняння. Далі за допомогою введення безрозмірної змінної ми приходимо до критерію подібності оболонок Тимошенка, який показує, що рівняння цієї моделі стають сингулярно збуреними при малих значеннях товщин та/або радіуса оболонки стосовно значень її довжини.

У п.3 ми характеризуємо структуру варіаційного формулювання розглядуваної крайової задачі теорії оболонок Тимошенка і в п.4 доводимо нерівність Корна, яка дозволяє встановити, що білінійна форма варіаційного рівняння визначає енергетичний скалярний добуток та асоційовану з ним норму на просторі допустимих переміщень. Доповнюючи цей факт неперервністю лінійного функціоналу і посиланням на теорему Лакса-Мільграма-Вишика ми переконуємося в однозначній розв'язності варіаційної задачі про циліндричну оболонку Тимошенка.

1. Крайова задача теорії оболонок Тимошенка

Тут і нижче ми розглядаємо осесиметричну задачу статки однорідної ізотропної кругової циліндричної оболонки радіуса R , довжини L і товщини $h > 0$, $h/R \leq 1$ такого гатунку [5-8]: знайти вектор узагальнених пружних зміщень $\Psi(z) = [u(z), w(z), \gamma(z)]^T$, компоненти тензора деформацій $\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{13}, \alpha_1]^T$ та тензора напружень $\sigma = [N_1, N_2, N_{13}, M_1]^T$ такі, що задовольняють рівняння рівноваги

$$-\frac{d}{dz} N_1 = f_1, -\frac{d}{dz} N_{13} + R^{-1} N_2 = f_3, -\frac{d}{dz} M_1 + N_{13} = f_4 \quad \text{в } \Omega = (0, L), \quad (1.1)$$

феноменологічний закон Гука $\sigma = K \varepsilon$ або в розгорненому вигляді

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{13} \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & \nu B & 0 & 0 \\ \nu B & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{13} \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \quad \text{в } \Omega = (0, L), \quad (1.2)$$

співвідношення Коші $\varepsilon = C\Psi$ або в розгорненому вигляді

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{13} \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dz} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dz} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \text{в } \Omega = (0, L) \quad (1.3)$$

та крайові умови защемлення-навантаження

$$\Psi(0) = 0, \quad [N_1, N_{13}, M_1]^T \Big|_{z=L} = [\bar{N}_1, \bar{N}_{13}, \bar{M}_1]^T \quad (1.4)$$

Тут значення коефіцієнтів рівнянь визначаються згідно правил

$$B = \frac{2Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad B_c = \frac{Eh}{2(1+\nu)} k', \quad k' = \frac{5}{6}, \quad (1.5)$$

де $E > 0$ і $\nu \in (0, 1/2)$ модулі пружності Юнга і Пуассона циліндричної оболонки сталого радіуса R , довжини L і товщини $h > 0$. Тут і скрізь далі $\mathbf{f}(z) = \{f_1(z), f_2(z), f_4(z)\}$ та $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = [\bar{N}_1, \bar{N}_{13}, \bar{M}_1]^T$ задані вектори поверхневого та об'ємного навантаження на оболонку та її край $z = L$ відповідно, за деталями див. [7,8].

Щоб деталізувати структуру системи диференціальних рівнянь крайової задачі (1.1)-(1.4), підставимо в рівняння рівноваги (1.1) і крайові умови (1.4) визначення (1.2) і (1.3); в результаті невеликої алгебри одержимо їхній вигляд у матричному записі

$$-\begin{bmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & B_c & 0 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix} \Psi'' + \begin{bmatrix} 0 & -\nu R^{-1}B & 0 \\ \nu R^{-1}B & 0 & -B_c \\ 0 & B_c & 0 \end{bmatrix} \Psi' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu R^{-1}B & 0 \\ 0 & 0 & B_c \end{bmatrix} \Psi = \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega. \quad (1.6)$$

$$\Psi(0) = 0, \quad \begin{bmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & B_c & 0 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix} \Psi'(L) + \begin{bmatrix} 0 & \frac{\nu}{R}B & 0 \\ 0 & 0 & B_c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Psi(L) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (1.7)$$

Діагональна матриця $\mathbf{B} = \text{diag}[B, B_c, D]$ додатно визначена, що дозволяє однозначно розв'язати рівняння (1.6) та (1.7) відносно старших похідних i , отже, знайти розв'язок цієї задачі.

Вироджена косиметрична матриця фізичних параметрів оболонки $\mathbf{G}$ при похідних першого порядку $\psi'(z)$ пов'язує компоненти розв'язку у систему рівнянь і визначає складну структуру їхніх взаємозв'язків, що вимагає глибшого аналізу її властивостей.

1.1. Властивості матриці фізичних параметрів оболонки. Безпосередніми обчисленнями доводиться.

Теорема 1.1 *про матрицю фізичних характеристик оболонки.*

Додатно визначена матриця $\mathbf{K}$ з (1.2) характеризується такими властивостями.

(i) Власні числа матриці $\mathbf{K}$ утворюють множину

$$\{\lambda_i\}_{i=1}^4 = \{B_c, D, (1+\nu)B, (1-\nu)B\} \quad (1.8)$$

$$\lambda_{\min} = \min[\{\lambda_i\}_{i=1}^4] = D, \quad \lambda_{\max} = \max[\{\lambda_i\}_{i=1}^4] = (1+\nu)B.$$

(ii) Для достатньо малих товщин h оболонки число обумовленості матриці $\mathbf{K}$

$$\rho(\mathbf{K}) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = 12 \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{h^2}. \quad (1.9)$$

$$(iii) \quad \det \mathbf{K} = |\mathbf{K}| = (1-\nu^2)B^2 B_c D = \frac{1}{24} \frac{E^4 k'}{(1+\nu)(1-\nu^2)} h^6. \quad (1.10)$$

(iv) Відповідний власним числам $\{\lambda_i\}_{i=1}^4 = \{B_c, D, (1+\nu)B, (1-\nu)B\}$ набір власних векторів $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1}^4$ утворює матрицю

$$\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & t & 0 & 0 \\ -t & t & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad t = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$(v) \quad \mathbf{K} = \mathbf{W}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{W}, \quad (1.11)$$

де $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}[\{B_c, D, (1+\nu)B, (1-\nu)B\}]$.

Твердження теореми (1.9) і (1.10) показують, що матриця фізичних параметрів оболонки $\mathbf{K}$ стає погано обумовленою при малих значеннях товщини h оболонки. Цей факт може стати причиною послаблення стійкості процедур числового розв'язання таких задач.

Декомпозицією (1.11) матриці $\mathbf{K}$ ми скористаємося дещо пізніше, див. п. 4.

1.2. Критерії подібності і сингулярна збуреність крайової задачі. Додаткову характеристику рівнянь задачі (1.6), (1.7) одержимо здійснивши перехід в них до безрозмірної змінної $\tau \in [0, 1]$ згідно правила $z = L\tau$. В цьому випадку система рівнянь (1.6) в матричному записі набуде вигляду

$$-L^{-2} \mathbf{B} \ddot{\psi}(\tau) + L^{-1} \mathbf{G} \dot{\psi}(\tau) + \mathbf{S} \psi(\tau) = \mathbf{f}[z(\tau)] \quad \forall \tau \in (0, 1) \quad (1.12)$$

де $\ddot{\mathbf{g}} := \frac{d^2}{d\tau^2} \mathbf{g}$ тощо.

Тепер обчислимо коефіцієнти біля старших похідних цих рівнянь, якщо кожне з них поділити на $\nu(RL)^{-1}B$, $\nu R^{-1}B$ і B_c відповідно. В результаті одержимо такі безрозмірні параметри (критерії подібності) біля старших похідних цих рівнянь

$$\begin{aligned} N_u &:= \frac{BL^{-2}}{\nu(RL)^{-1}B} = \frac{R}{L} \frac{1}{\nu}, \\ N_w &:= \frac{B_c}{L^2 \nu R^{-1}B} \equiv \frac{1}{4} \frac{1-\nu}{\nu} k' \left(\frac{R}{L} \right)^2, \\ N_\gamma &:= \frac{D}{L^2 B_c} \equiv \frac{1}{6(1-\nu)k'} \left(\frac{h}{L} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.13)$$

відповідно. Звідси приходимо до висновку, що коефіцієнти при старших похідних перших двох рівнянь рівноваги можуть вироджуватися, іншими словами, $N_u \rightarrow 0$,

$N_w \rightarrow 0$, якщо $RL^{-1} \rightarrow 0$ (малість радіуса оболонки).

Подібно, коефіцієнт при старшій похідній третього рівняння рівноваги вироджується, $N_\gamma \rightarrow 0$, якщо $hL^{-1} \rightarrow 0$ (малість товщини оболонки). Критерії (1.13)

визначають можливу сингулярну збуреність задачі (1.6), (1.7), зумовлену співвідношеннями геометричних параметрів R, L, h , а також коефіцієнтом Пуассона ν матеріалу оболонки.

Підсумки наших міркувань подає

Пропозиція 1.1 *про критерії подібності в теорії оболонок Тимошенка*

Нехай задача про статичну рівновагу оболонки Тимошенка описується крайовою задачею (1.6), (1.7). Тоді за критерій сингулярної збуреності її окремих рівнянь слугують безрозмірні параметри (1.13), в той же час, малі значення безрозмірного критерію

$$N := \sqrt{N_w \cdot N_\gamma} = \frac{1}{2\sqrt{6\nu}} \frac{R}{L} \frac{h}{L} \quad (1.14)$$

характеризують сингулярну збуреність цієї задачі в цілому.

2. Варіаційна задача про рівновагу циліндричної оболонки

Допустивши, що трійка $\Psi(z) = [u(z), w(z), \gamma(z)]^T$ є розв'язком задачі (1.1)-(1.4), домножимо скалярно рівняння рівноваги (1.1) на довільний вектор $\Phi(z) = [v(z), y(z), \xi(z)]^T$ і зінтегруємо одержаний результат на відрізку $\Omega = (0, L)$ з використанням інтегрування частинами. Як наслідок прийдемо до рівності

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left[N_1(\Psi) v' + N_2(\Psi) \frac{y}{R} + N_{13}(\Psi) (y' + \xi) + M_1(\Psi) \xi' \right] dz \\ &= \int_0^L \mathbf{f}^T \Phi dz + [N_1(\Psi) v + N_{13}(\Psi) y + M_1(\Psi) \xi] \Big|_0^L \end{aligned} \quad (2.1)$$

або більш коротко в матричному записі

$$\int_0^L \boldsymbol{\sigma}^T(\boldsymbol{\psi}) \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}) dz = \int_0^L \mathbf{f}^T \boldsymbol{\varphi} dz + [N_1(\boldsymbol{\psi})v + N_{13}(\boldsymbol{\psi})y + M_1(\boldsymbol{\psi})\xi]_0^L.$$

Тепер, беручи до уваги крайові умови защемлення з (1.4), визначимо простір допустимих зміщень

$$\Phi := \left\{ \boldsymbol{\varphi} = \{v, y, \xi\} \in [H^1(\Omega)]^3 : \boldsymbol{\varphi}(0) = 0 \right\} \quad (2.2)$$

і врахуємо в (2.1) умови навантаження з (1.4); в результаті (2.1) набуває вигляду

$$\int_0^L \boldsymbol{\sigma}^T(\boldsymbol{\psi}) \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}) dz = \int_0^L \mathbf{f}^T \boldsymbol{\varphi} dz + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \boldsymbol{\varphi}(L) \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \Phi$$

Нарешті, увівши на просторі допустимих зміщень Φ білінійну форму $\Pi(\cdot, \cdot) : \Phi \times \Phi \rightarrow R$ та лінійний функціонал $l : \Phi \rightarrow R$ згідно правил

$$\Pi(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}) := \int_0^L \boldsymbol{\sigma}^T(\boldsymbol{\psi}) \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}) dz \quad \forall \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi} \in \Phi \quad (2.3)$$

$$\langle l, \boldsymbol{\varphi} \rangle := \int_0^L \mathbf{f}^T \boldsymbol{\varphi} dz + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \boldsymbol{\varphi}(L) \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \Phi \quad (2.4)$$

сформулюємо варіаційну задачу статки оболонки Тимошенка: знайти вектор $\boldsymbol{\psi} \in \Phi$ такий, що

$$\Pi(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}) = \langle l, \boldsymbol{\varphi} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \Phi \quad (2.5)$$

Отже, якщо вектор $\boldsymbol{\psi} \in \Phi$ є розв'язком крайової задачі (1.1)-(1.4), то він одночасно є одним із розв'язків (2.5). Обернене твердження про те, що розв'язок (2.5) буде розв'язком (1.1)-(1.4) вимагає додаткової аргументації, яке виходить за межі нашого дослідження.

Найближче наше завдання – дати відповідь на питання стосовно коректності формулювання варіаційної задачі (2.5) і, якщо це так, то охарактеризувати достатні умови регулярності даних такої задачі. Маючи за орієнтир теорему Лакса-Мільграма-Вишика [7,10] нижче ми аналізуємо властивості її білінійної форми (2.3) і лінійного функціоналу (2.4).

3. Властивості білінійної форми варіаційної задачі

Нижче в тому чи іншому випадку нам буде корисним таке твердження.

Лема 3.1 *про симетричні форми запису $\Pi(\cdot, \cdot) : \Phi \times \Phi \rightarrow R$.*

Для кожної пари трійок $\boldsymbol{\psi} = \{u, w, \gamma\}$, $\boldsymbol{\varphi} = \{v, y, \xi\} \in \Phi$ білінійна форма $\Pi(\cdot, \cdot) : \Phi \times \Phi \rightarrow R$ задачі (2.5) може бути подана в симетричному записі такими виразами:

$$(i) \quad \Pi(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}) = \int_0^L [\mathbf{W}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi})]^T \mathbf{A} [\mathbf{W}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi})] dz = \int_0^L \{ \lambda_1 \varepsilon_{13}(\boldsymbol{\varphi}) \varepsilon_{13}(\boldsymbol{\psi}) + \lambda_2 a_1(\boldsymbol{\varphi}) a_1(\boldsymbol{\psi}) \} dz + \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} \lambda_3 [\varepsilon_1(\boldsymbol{\varphi}) + \varepsilon_2(\boldsymbol{\varphi})] [\varepsilon_1(\boldsymbol{\psi}) + \varepsilon_2(\boldsymbol{\psi})] + \frac{1}{2} \lambda_4 [\varepsilon_1(\boldsymbol{\varphi}) - \varepsilon_2(\boldsymbol{\varphi})] [\varepsilon_1(\boldsymbol{\psi}) - \varepsilon_2(\boldsymbol{\psi})] \right\} dz \quad (3.1)$$

$$(ii) \quad \begin{aligned} \Pi(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}) = & \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} B [(1+v)(u' + R^{-1}w)(v' + R^{-1}y) \right. \\ & + (1-v)(u' - R^{-1}w)(v' + R^{-1}y)] \\ & \left. + B_c(\gamma + w')(\xi + y') + D\gamma'\xi' \right\} dz \end{aligned} \quad (3.2)$$

Доведення цих фактів одержується безпосередніми алгебричними обчисленнями з використанням визначень (1.2), (1.3) і теореми 1.1.

Наступне твердження декларує ключові властивості білінійної форми задачі (2.5).

Лема 3.2 *про неперервність та додатність білінійної форми* $\Pi(\cdot, \cdot)$.

Нехай $\Pi(\cdot, \cdot): \Phi \times \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ визначено згідно правил (3.1)-(3.2) і $\{\lambda_i\}_{i=1}^4$ - власні числа матриці $\mathbf{K}$.

Тоді

$$(i) \quad \Pi(\Psi, \Phi) \leq \lambda_{\max} \|\mathbf{e}(\Psi)\|_0 \|\mathbf{e}(\Phi)\|_0 \quad \forall \Psi, \Phi \in \Phi \quad (3.3)$$

$$(ii) \quad \Pi(\Phi, \Phi) \geq \lambda_{\min} \|\mathbf{e}(\Phi)\|_0^2 \quad \forall \Phi = \{v, y, \xi\} \in \Phi \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}(\Phi)\|_0^2 &= \|\mathbf{e}_1(\Phi)\|_0^2 + \|\mathbf{e}_2(\Phi)\|_0^2 + \|\mathbf{e}_{13}(\Phi)\|_0^2 + \|\mathbf{e}_1(\Phi)\|_0^2 \\ \text{де} \quad &= \|v'\|_0^2 + R^{-2} \|y\|_0^2 + \|y' + \xi\|_0^2 + \|\xi'\|_0^2 \quad \forall \Psi, \Phi \in \Phi \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\|g\|_0^2 := \int_0^L g^2(z) dz.$$

Доведення першого з цих тверджень одержуємо з використанням нерівності Коші-Буняковського-Шварца вигляду

$$\Pi(\Psi, \Phi) \leq \Pi^{\frac{1}{2}}(\Phi, \Phi) \Pi^{\frac{1}{2}}(\Psi, \Psi) \quad \forall \Psi, \Phi \in \Phi$$

Далі за подання (3.1) леми 3.1 знаходимо, що

$$\begin{aligned} \Pi(\Phi, \Phi) &\geq \lambda_{\min} \int_0^L \left\{ \varepsilon_{13}^2(\Phi) + \varepsilon_1^2(\Phi) + \frac{1}{2} [\varepsilon_1(\Phi) + \varepsilon_2(\Phi)]^2 + \frac{1}{2} [\varepsilon_1(\Phi) - \varepsilon_2(\Phi)]^2 \right\} dz = \\ &\lambda_{\min} \int_0^L [\varepsilon_{13}^2(\Phi) + \varepsilon_1^2(\Phi) + \varepsilon_1^2(\Phi) + \varepsilon_2^2(\Phi)] dz = \lambda_{\min} \|\mathbf{e}(\Phi)\|_0^2 \quad \forall \Phi \in \Phi \end{aligned}$$

Теорема 3.1 *про нерівність Корна*

Знайдеться $\alpha = \text{const} > 0$ така, що

$$\|\mathbf{e}(\Phi)\|_0^2 \geq \alpha \|\Phi\|_1^2 \quad \forall \Phi \in \Phi, \quad \alpha = \text{const} > 0. \quad (3.6)$$

Більше цього, існує $\beta = \text{const} > 0$ така, що

$$\begin{aligned} \alpha \|\Phi\|_1^2 &\leq \|\mathbf{e}(\Phi)\|_0^2 \leq \beta \|\Phi\|_1^2, \\ \alpha \lambda_{\min} \|\Phi\|_1^2 &\leq \Pi(\Phi, \Phi) \leq \beta \lambda_{\max} \|\Phi\|_1^2 \quad \forall \Phi \in \Phi. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Доведення: Розгорнемо в (3.5) доданки під знаком інтеграла

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}(\Phi)\|_0^2 &= \int_0^L [\varepsilon_{13}^2(\Phi) + \varepsilon_1^2(\Phi) + \varepsilon_1^2(\Phi) + \varepsilon_2^2(\Phi)] dz \\ &= \int_0^L [(y' + \xi)^2 + (\xi')^2 + (v')^2 + R^{-2} y^2] dz \end{aligned}$$

і, скориставшись оцінкою $2y'\xi \leq \sigma(y')^2 + \frac{1}{\sigma}(\xi)^2$, $\sigma = \text{const} > 0$, знайдемо

$$\|\mathbf{e}(\Phi)\|_0^2 \geq \int_0^L \left[(1 - \sigma)(y')^2 + (1 - \frac{1}{\sigma})\xi^2 + (\xi')^2 + (v')^2 + R^{-2} y^2 \right] dz.$$

Далі, оскільки кожна функція $g \in H^1(\Omega)$, $g(0) = 0$, задовольняє нерівність Пуанкаре-Фрідрікса

$$\frac{2}{L^2} \|\xi\|_0^2 \leq \|\xi'\|_0^2 \quad (3.8)$$

підсилимо одержану нерівність

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(\Phi)\|_0^2 &\geq (1-\sigma)\|y'\|_0^2 + (1-\frac{1}{\sigma})\|\xi\|_0^2 + \|\xi'\|_0^2 + \|v'\|_0^2 + R^{-2}\|y\|_0^2 \\ &\geq (1-\sigma)\|y'\|_0^2 + (1-\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{L^2})\|\xi\|_0^2 + \frac{1}{2}\|\xi'\|_0^2 + \|v'\|_0^2 + R^{-2}\|y\|_0^2. \end{aligned}$$

Покладемо тепер $\sigma = \frac{L^2}{1+L^2}$ і після нескладних обчислень одержимо

$$\|\varepsilon(\Phi)\|_0^2 \geq \frac{1}{1+L^2}\|y'\|_0^2 + \frac{1}{2}\|\xi\|_0^2 + \|v'\|_0^2 + \frac{1}{R^2}\|y\|_0^2. \quad (3.9)$$

Скориставшись ще раз оцінкою (3.8) з допустимими функціями $\xi = \xi(z)$ і $v = v(z)$

обчислимо сталу $\alpha = \alpha(L, R) = \min\left\{\frac{1}{1+L^2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{R^2}, \frac{1}{2L^2}\right\} > 0$ таку, що задовольняє

бажану нерівність (3.6).

Наслідок 3.1 *про еквівалентні норми на Φ .*

Симетрична білінійна форма $\Pi(\cdot, \cdot): \Phi \times \Phi \rightarrow R$, визначена згідно (3.1) чи, що те саме, (3.2) визначає енергетичний скалярний добуток на просторі Φ та асоційовану з ним норму

$$\|\Phi\|_{\Pi} := \sqrt{\Pi(\Phi, \Phi)} \quad \forall \Phi \in \Phi, \quad (3.10)$$

яка еквівалентна раніше введеним нормам $\|\varepsilon(\Phi)\|_0$ та $\|\Phi\|_1$.

Подібними міркуваннями обчислимо

Лема 3.3 *про неперервність лінійного функціоналу.*

Нехай функціонал $l: \Phi \rightarrow R$ визначено у (2.4). Тоді

$$|\langle l, \Phi \rangle| \leq (\|\mathbf{f}\|_0 + \sqrt{L}|\bar{\sigma}|)\|\Phi\|_0 \quad \forall \Phi \in \Phi. \quad (3.11)$$

Доведення: засноване на поданні $\Phi(L) = \int_0^L \Phi'(z) dz$ і міркуваннях теореми 3.1.

Наслідок 3.2 *про коректність задачі з варіаційним рівнянням (2.5).*

Нехай дані задачі (2.5) такі, що

$$\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^3, |\bar{\sigma}| < +\infty, 0 < L < +\infty. \quad (3.12)$$

Варіаційна задача (2.5) коректно сформульована; іншими словами, існує єдиний розв'язок $\Psi = \{u, v, \gamma\} \in \Phi$ рівняння (2.5), причому

$$\|\Psi\|_1 \leq \frac{1}{\alpha \lambda_{\min}} [\|\mathbf{f}\|_0 + \sqrt{L}|\bar{\sigma}|]$$

Доведення: Досить послатися на умови теореми Лакса-Мільграма-Вишика, результати теореми 3.1 та лем 3.2 і 3.3.

Добре відомий результат констатує

Наслідок 3.3 *про еквівалентну задачу мінімізації.*

Задача про варіаційне рівняння (2.5) еквівалентна такій задачі мінімізації квадратичного функціоналу:

$$\begin{aligned} &\text{знайти } \psi \in \Phi \text{ такий, що } J(\psi) \leq J(\varphi) \quad \forall \varphi \in \Phi, \\ &\text{де } J(\varphi) = \Pi(\varphi, \varphi) - 2\langle l, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \Phi. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Більше цього,

$$\min_{\varphi \in \Phi} J(\varphi) = J(\psi) = -\|\psi\|_{\Pi}^2 = -\langle l, \psi \rangle. \quad (3.14)$$

Висновки. Дотримуючись фізичної інтерпретації шуканого розв'язку крайової статистики циліндричної оболонки тут побудовано відповідну варіаційну задачу (2.5) з симетричною лінійною формою $\Pi(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow R$ і лінійним функціоналом $l: V \rightarrow R, V = [H^1(\Omega)]^3$.

Розгляд варіаційного рівняння звужено до підпростору $\Phi \subset V$, який виключає допустимі трійки $\varphi = \{v, u, \xi\}$ з жорсткими зміщеннями оболонки. Як наслідок цього факту одержуємо ключову властивість допустимих пружних деформацій оболонки: $\|\varepsilon(\varphi)\|_0$ еквівалентна $\|(\varphi)\|_1$ (нерівність Корна). Цей факт приводить до неперервності та еліптичності форми $\Pi(\cdot, \cdot): \Phi \times \Phi \rightarrow R$, а також неперервності функціоналу $l: \Phi \rightarrow R$. Таким чином згідно теореми Лакса-Мільграма-Вишика варіаційна задача (2.5) коректно сформульована і понад це її розв'язок ψ є єдиним елементом, який мінімізує квадратичний функціонал $J(\varphi)$ на Φ .

Важливим наслідком встановлених властивостей білінійної форми $\Pi(\cdot, \cdot): \Phi \times \Phi \rightarrow R$ є можливість використання її на просторі Φ в ролі нового скалярного добутку та асоційованої з ним норми (3.6), так званої енергетичної норми.

Виконаний нами в п.2 аналіз структури рівнянь дозволив встановити критерій подібності (1.14), який можна використати як практичний інструмент для прогнозування сингулярної збуреності крайової задачі про циліндричну оболонку, побудовану на гіпотезах Тимошенка.

Підсумовуючи одержані вище результати теоретичного аналізу стосовно однозначної розв'язності задачі про циліндричну оболонку приходимо до висновку, що за цілком придатних для застосувань даних цієї задачі її наближені розв'язки можуть бути успішно обчислені методами Гальоркіна (якщо ми зупиняємося на формулюванні (2.5)) або Рітца (якщо використати формулювання (3.13)). Детальному аналізу та реалізації цих методів з використанням адаптивних схем методу скінченних елементів присвячена друга частина цієї статті.

Література

1. Бурак Я.І., Рудавський Ю.К., Сухорольський М.А. Аналітична механіка локально-навантажених оболонок. Львів: Інтеллект-Захід; 2007. 240 с.
2. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные оболочки вращения переменной жесткости. Киев: Наук. думка; 1973. 228 с.
3. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: ИД “Академперіодика”; 2006. 472 с.

4. Nečas J., Hlaváček I. Mathematical Theory of Elastic and Elastic-Plastic Bodies: An Introduction. Elsevier; 1981. 342 pp.
5. Пелех Б.Л. Обобщенная теория оболочек. Львов: Вища школа; 1978. 159 с.
6. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наук. думка; 1973. 248 с.
7. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А., Вовк В.Н. Некоторые приложения метода конечных элементов. Львов: Изд-во Львов. ун-та; 1981. 88 с.
8. Савула Я.Г., Флейшман Н.П. Расчет и оптимизация оболочек с резными срединными поверхностями. Львов: Вища школа; 1989. – 172 с.
9. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells. New York: McGraw-Hill; 1940. – 591 pp.
10. Вагін П.П., Іванова Н.В., Шинкаренко Г.А. Постановка, розв'язуваність та апроксимація варіаційних задач статички зсувних оболонок. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 1999; 42(2): 53-61.
11. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука; 1982. – 286 с.
12. Бернакевич І.С., Вагін П.П., Шинкаренко Г.А. Математична модель акустичної взаємодії оболонки з рідиною. I. Формулювання і розв'язуваність варіаційних задач. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2002; 45(2): 75-80.
13. Бернакевич І.С., Вагін П.П., Шинкаренко Г.А. Математична модель акустичної взаємодії оболонок з рідиною. II. Проекційно-сіткові апроксимації та їх збіжність. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2004; 47(3): 37-44.
14. Вагін П.П., Іванова Н.В., Шинкаренко Г.А. Аналіз зсувних оболонок: постановка та коректність варіаційних задач динаміки. Математичні студії. 1998; 10(2): 188-198.
15. Григоренко Я.М., Савула Я.Г., Муха И.С. Линейные и нелинейные задачи упругого деформирования оболочек сложной формы и методы их численного решения. Приклад. механика. 2000; 36(8): 3–27.
16. Шинкаренко Г., Малашняк П. Аналіз h -адаптивних апроксимацій МСЕ в задачах статички циліндричних оболонок. 11-а Міжнар. наук. конф. Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: Збірник наукових праць. Львів: ІППИМ ім. Я. Підстригача НАНУ; 2024; 6: 41-42.

Analysis of h -Adaptive Finite Element Method in Static Problems of Cylindrical Shells: I. Wellposedness of Axisymmetric Variational Formulation

Heorhiy Shynkarenko¹, Pavlo Malashnyak²

¹professor of Ivan Franko National University of Lviv, Lviv,

²post graduate student of Ivan Franko National University of Lviv, Lviv,

¹heorhiy.shynkarenko@lnu.edu.ua, ²pavlo.malashnyak@lnu.edu.ua

This article is devoted to establishing the correctness of boundary value problems in the statics of Timoshenko shells and the approximation of their solutions using the finite element method (FEM) with a priori guaranteed accuracy. In the first part of this study, the following results are established for this shell model: (i) sufficient (and entirely practical) conditions for the solvability of the variational formulation of the boundary value problem for a cylindrical shell under axisymmetric loading; (ii) the structure of the rigid displacement vectors of such shell; (iii) a criterion for the singular perturbation of the boundary value problem. In the second part, the following are proposed: (iv) an a posteriori error estimator (APE) for piecewise linear FEM approximations of the generalized displacement vector of the shell; (v) a local mesh refinement strategy for the efficient computation of FEM approximations with a predefined level of allowable error. The efficiency and reliability of the developed iterative h -adaptive approximation procedure are illustrated by numerical results from the analysis of model problem solutions, in particular, in comparison with traditional uniform mesh refinement.

Отримано 02.06.2025 р.