УДК 004.052:681.269. 4
doi.org/10.15407/fmmit2024.39.049

Похибка вимірювання кількості листів паперу на віброзіштовхувачі

Антоній Кульчицький[1], Андрій Пушак[2]

[1]к. фіз.-мат. н., доцент, Національний університет «Львівська політехніка», вул. Під Голоском 19, Львів, 79061, Україна, antoniykulch@gmail.com

[2]к. фіз.-мат. н., доцент, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Кирила і Мефодія, 8, Львів, 79005, Україна, andriy.pushak@gmail.com

В роботі проведено аналіз точності оцінки визначеної ваговим методом кількості аркушів паперу на віброзіштовхувачах з точки зору теорії ймовірності та математичної статистики. Отримано результуючу формулу для визначення довірчої межі похибки вимірювання. Встановлено, що для паперу з коефіцієнтом варіації у діапазоні 0,52%–1,29% (при загальній кількості листів 4000) довірча межа похибки, за рахунок вагової неоднорідності листів, перевищує (приблизно у 5 разів) довірчу межу похибки за рахунок неточності великих та малих ваг. Тобто, точність оцінки кількості листів паперу (в розглянутих випадках) в основному визначається коефіцієнтом варіації маси одного листа. Для швидкої оцінки довірчої межі похибки кількості листів у стосі пропонується (для потрібного сорту паперу) будувати графік у вигляді каскаду ліній (при різних дискретних значеннях загальної кількості листів), які відображають залежність цієї величини від коефіцієнта варіації маси одного листа. Цим графіком зручно користуватись, працюючи з певним сортом паперу від різних виробників.

Ключові слова: *похибка вимірювання, віброзіштовхувач, коефіцієнт варіації, вибірка, дисперсія.*

1. Теоретична частина. При виготовленні паперової продукції (наприклад, упаковки) формують, для подальшої обрізки, стос паперу з декілька тисяч листів. Важливим параметром є точність оцінки визначеної кількості листів паперу у сформованому стосі [1]. Кількість листів паперу після порізки вимірюється автоматикою абсолютно точно. Але, якщо подачу паперу здійснює віброзіштовхувач, то похибка кількості листів паперу на віброзіштовхувачі впливає на планування кількості продукції, яка буде виготовлена з цього паперу.

Для визначення кількості Z листів паперу у досить великих стосах, маса яких може складати тисячі кілограм, використовують великі та малі (більш точні) ваги. Визначають масу m малої вибірки, кількість n листів якої набагато менша за загальну кількість листів Z у повному стосі, та визначають масу M залишку цього стосу (великої вибірки). В ідеальному випадку, якби маси μ окремих листів були б однакові, тоді загальну кількість листів паперу у повному стосі можна знайти за формулою:

$$\mathrm{Z} = M\ /(m/n) + n. \qquad (1)$$

Ми маємо справу з прямими (M, m) та опосередкованими (Z) вимірюваннями. Опосередковані вимірювання – це такі, які отримують шляхом математичної залежності через окремі прямі вимірювання. В нашому випадку загальна кількість паперу у стосі є функцією від значень прямого вимірювання великої та малої мас. Для знаходження абсолютної похибки опосередкованого вимірювання можна застосовувати різні методи. Наприклад, це можуть бути метод середнього арифметичного та метод диференціювання. Кожний з методів має свої переваги та недоліки. Якщо можна застосувати різні методи знаходження похибок, то обирається той метод, який дає найбільшу похибку. Метод диференціювання базується на подібності диференціала та абсолютної похибки. Диференціал функції – це її зміна при як завгодно малих змінах аргументів. Абсолютна похибка функції – це також її зміна при зміні прямих вимірювань в межах їх абсолютних похибок. Тому, якщо абсолютні похибки прямих вимірювань набагато менші за вимірювані величини, тоді можна застосовувати метод диференціювання для знаходження абсолютної похибки опосередкованого вимірювання. Практика показує, що термін «набагато» означає: більше, ніж у 100 разів.

Строге математичне доведення можливості знаходження абсолютної похибки опосередкованих вимірювань методом диференціювання базується на розкладанні

функціональної залежності опосередкованого вимірювання від прямих вимірювань в ряд Тейлора, де можна обмежитись лінійними членами.

На практиці з віброзіштовхувачів беруть малу вибірку масою $m \approx 1$кг, та визначають її з точністю (ціна поділки малих ваг) $\Delta m = 10^{-4} \ldots 10^{-5}$ кг. В нашому випадку абсолютну похибку загальної кількості листів паперу в пачці можна знаходити як повний диференціал функції (1), якщо знак диференціалу d замінити на знак абсолютної похибки Δ і вибрати знаки таким чином, щоб величина похибки була максимальною, тобто

$$\Delta Z \approx \left|\frac{\partial Z}{\partial M}\,\Delta M\right| + \left|\frac{\partial Z}{\partial m}\right|\Delta m, \quad (2)$$

за умови, що $\Delta\, M \ll M$ та$\Delta\, m \ll\; m$. Підставивши рівняння (1) в (2) отримаємо:

$$\Delta Z \approx \frac{n}{m}\left(\Delta M + \frac{M}{m}\,\Delta m\right). \quad (3)$$

Ці похибки розраховані в припущенні, що всі листи стосу мають абсолютно однакову масу μ.

Для того, щоб оцінити якість проведеного вимірювання загальної кількості Z листів у стосі з врахуванням **вагової неоднорідності** листів, підійдемо до цієї задачі з точки зору теорії ймовірності та математичної статистики [2], де випадкові події оцінюються таким параметром, як дисперсія. Для визначення дисперсії нормального закону розподілу похибок Δ користуються формулою

$$\sigma^2 = \;\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_i^2}{n-1}, \quad (4)$$

де $\Delta_i^2 = \;(x_i - \;\overline{x})^2$, σ – середня квадратична похибка окремого вимірювання. В нашому випадку загальна кількістьZ є функцією незалежних змінних M та m. Тому

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial Z}{\partial M}\right)^2\sigma_M^2 + \;\left(\frac{\partial Z}{\partial m}\right)^2\sigma_m^2, \quad (5)$$

де σ_Z^2 – дисперсія математичного очікування загальної кількості листів у стосі, σ_{M}^2 – дисперсія математичного очікування маси великої вибірки, σ_m^2 – дисперсія математичного очікування маси малої вибірки.

Після підстановки (1) в (5) отримаємо:

$$\sigma_Z^2 \;=\; \left(\frac{n}{m}\right)^2\left(\sigma_M^2 \;+\; \left(\frac{M}{m}\right)^2\sigma_m^2\right). \quad (6)$$

В рівнянні (6) врахуємо вагову неоднорідність листів, записавши:

$$\sigma_M^2 = \sigma_{M\,instr}^2 + \sigma_{\mathrm{M}\ method}^2, \quad (7)$$

$$\sigma_{\mathrm{m}}^2 = \sigma_{\mathrm{m\,instr}}^2 + \sigma_{\mathrm{mmethod}}^2, \quad (8)$$

де $\sigma_{\mathrm{M\,instr}}^2$ і $\sigma_{\mathrm{minstr}}^2$ – дисперсії за рахунок неточності вимірювальних приладів, $\sigma_{\mathrm{M}\ method}^2$ і $\sigma_{mmethod}^2$ – дисперсії за рахунок неоднорідності листів паперу.

За аналогією, результуючу дисперсію значення σ_Z^2 також можна представити як

$$\sigma_Z^2 = \sigma_{Z\,instr}^2 + \sigma_{Z\,method}^2, \quad (9)$$

де

$$\sigma_{Zinstr}^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 \left[\sigma_{M\,instr}^2 + \left(\frac{M}{m}\right)^2 \sigma_{m\,instr}^2\right]. \quad (10)$$

Інструментальні середні квадратичні похибки $\sigma_{\mathrm{M}\,instr}$ σ_{instr} та великої ваги та малої ваги, відповідно, обумовлені конструктивними особливостями цих пристроїв, та визначаються їхнім виробником.

Знаходження методичної похибки. Враховуючи те, що вибірки складаються з окремих листів, можна записати, що дисперсія результуючих мас складається з суми дисперсій мас окремих листів. Тобто:

$$\sigma_{Mmethod}^2 = (Z-n)\cdot\sigma_\mu^2, \quad (11)$$

$$\sigma_{m\,method}^2 = n\cdot\sigma_\mu^2. \quad (12)$$

Причому дисперсія маси одного листа вираховується за формулою:

$$\sigma_\mu^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\bar{\mu} - \mu_i)^2}{k-1}, \quad (13)$$

де k – кількість листів з малої вибірки, маси μ_i якої вимірювались поштучно на прецизійних терезах. Після підстановки (11) та (12) в (6) отримаємо:

$$\sigma_{Zmethod}^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 \left[(Z-n)\sigma_\mu^2 + \left(\frac{M}{m}\right)^2 n\sigma_\mu^2\right]. \quad (14)$$

З врахуванням того, що

$$\frac{M}{m} \approx \frac{Z-n}{n}, \quad (15)$$

тобто співвідношення мас великого стосу і малої вибірки приблизно дорівнює співвідношенню кількості листів в них, а також того, що

$$\frac{m}{n} \approx \bar{\mu}, \quad (16)$$

рівняння (14) набуде вигляд:

$$\sigma_{Zmethod}^2 = \left(\frac{\sigma_\mu}{\bar{\mu}}\right)^2 \frac{Z(Z-n)}{n}. \quad (17)$$

Введемо позначення коефіцієнта варіації маси одного листа:

$$\frac{\sigma_\mu}{\bar{\mu}} \equiv q. \quad (18)$$

Тоді, остаточно, дисперсія кількості листів паперу в загальному стосі за рахунок неоднорідності листів розраховується за формулою:

$$\sigma_{Zmethod}^2 = q^2 \frac{Z\,(Z-n)}{n}. \quad (19)$$

Для оцінки довірчої ймовірності заданого відхилення δ кількості листів паперу в однотипних пачках скористаємось методом Стьюдента. В нашому випадку гранична межа похибки вимірювання (тобто точність оцінки) загальної кількості листів паперу у стосі:

$$\delta = \sqrt{\delta_{instr}^2 + \delta_{method}^2}. \quad (20)$$

За аналогією з рівнянням (17)

$$\delta_{\mathrm{zmethod}}^2 = \frac{\delta_{\bar{\mu}}^2}{\bar{\mu}^2} \frac{\mathrm{Z}\,(Z-\mathrm{n})}{\mathrm{n}}, \quad (21)$$

де, у відповідності з методом Стьюдента, точність оцінки маси одного листа з заданою ймовірністю γ визначається рівнянням:

$$\delta_{\mu} = t_{\gamma,k} \frac{\sigma_{\mu}}{\sqrt{k}} \; . \quad (22)$$

Значення коефіцієнта Стьюдента $t_{\gamma,k}$ знаходять з таблиці розподілу Стьюдента за заданою надійністю γ та кількістю k проведених вимірювань маси окремих листів паперу на прецизійних терезах. Після підстановки (22) в (21), та, враховуючи рівняння (17), отримаємо:

$$\delta_{Z\,method} = \frac{\mathrm{t}_{\gamma,\mathrm{k}} \cdot \sigma_{\mathrm{z\,method}}}{\sqrt{\mathrm{k}}}. \quad (23)$$

Якщо випадкові інструментальна і методична похибки одного порядку, то довірча межа похибки вимірювання загальної кількості листів у стосі при невеликій кількості листів паперу, які зважуються поштучно, і заданій довірчій ймовірності γ визначається за формулою:

$$\delta = \sqrt{\left(\mathrm{t}_{\gamma} \cdot \sigma_{\mathrm{z}instr}\right)^2 + \left(t_{\gamma.k} \cdot \sigma_{\mathrm{z}method}/\sqrt{k}\right)^2}, \quad (24)$$

де t_{γ} – коефіцієнт Лапласа при довірчій ймовірності γ .

При вимірюванні маси великої вибірки та маси малої вибірки вважаємо, що маємо справу з нормальним розподілом за рахунок інструментальної неточності самих приладів. Ось чому при знаходженні точності оцінки δ_{instr} ми використовуємо функцію Лапласа. Тобто, за заданою надійністю γ, з таблиці Лапласа знаходимо коефіцієнт t_{γ}. Але, при знаходженні точності оцінки δ_{instr}, можна користуватись і розподілом Стьюдента, вважаючи, що проведено велику кількість вимірювань. При кількості вимірювань, більшої за 30 розподіл Стьюдента прямує до нормального. З співставлення таблиць Стьюдента та Лапласа випливає, що $t_{\gamma,\infty} = t_{\gamma}$, відповідно.

Після підстановки (10) та (19) в (24) отримаємо результуючу формулу для визначення довірчої межі похибки вимірювання:

$$\delta = \sqrt{\mathrm{t}_{\gamma}^2 \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2 \cdot \left(\sigma_{\mathrm{M}instr}^2 + \left(\frac{M}{m}\right)^2 \sigma_{m\,instr}^2\right) + t_{\gamma,k}^2 \mathrm{q}^{\,2} z(z-n)/nk}. \quad (25)$$

2. Експериментальна частина. В таблиці 1 приведено параметри паперу різних марок, використаних в експерименті.

Маса великої вибірки вимірювалась на вагах з абсолютною похибкою $\Delta\mathrm{M} = 10$ г. Маса малої вибірки вимірювалась на більш точних вагах з абсолютною похибкою $\Delta m = 0{,}1$ г. Довірчу межу похибки вимірювання загальної кількості листів у стосі ми розраховували при заданій довірчій ймовірності $\gamma = 0{,}95$. Отже, при $\gamma = 0{,}95$ коефіцієнт $t_{\gamma} = 1{,}96$.

Для графічних представлень довірчої межі похибки δ від: кількості листів n малої вибірки; кількості k листів, маси яких вимірюються поштучно; загальної кількості Z листів; коефіцієнта варіації q маси одного листа, враховуючи співвідношення (15) та (16), рівняння (25) було записано у вигляді:

$$\delta = \sqrt{t^2_{\gamma.\infty} \cdot \frac{1}{\bar{\mu}^2} \cdot \left(\sigma^2_{\text{M}\,instr} + \left(\frac{Z-n}{n}\right)^2 \sigma^2_{m\,instr}\right) + t^2_{\gamma.k} \text{q}^{\,2} Z(Z-n)/nk}. \quad (26)$$

Таблиця 1.

Експериментальні значення параметрів паперу

Щільність паперуза технічними умовами	Середня маса одного листа	Середнє квадратичне відхилення маси одного листа	Коефіцієнт варіації маси одного листа
	$\bar{\mu}$	$\sigma_{\mu} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \frac{(\bar{\mu} - \mu_i)^2}{k - 1}}$	$q = \frac{\sigma_{\mu}}{\bar{\mu}} \cdot 100$
г/м^2	г	г	%
120	50,9	0,43	0,85
150	23,6	0,30	1,29
210	80,6	042	0,52
80	33,1	0,27	0,81

2.1. Для визначення оптимального розміру малої вибірки проведені дослідження залежності величини довірчої межі похибки δ від кількості листів у малій вибірці для паперу щільністю 210 г/м^2. З графічного представлення такої залежності на рис. 1 можна зробити висновок, що для розглянутої нами поставки паперу достатньо робити малу вибірку в кількості 25 листів. Тому, для подальших розрахунків інших залежностей з іншими сортами паперу, ми брали малі вибірки з n = 25.

2.2. При визначенні коефіцієнта варіації q постає питання про кількість k листів паперу, маси яких вимірюються поштучно.

Значення k (при заданій довірчій ймовірності γ) визначає значення коефіцієнта Стьюдента $t_{\gamma.k}$ при розрахунках довірчої межі похибки δ_{method} за формулою (23), а отже – і значення результуючої довірчої межі похибки δ

за формулою (26). Залежність останньої від кількості листів з поштучним вимірюванням маси приведено на рис. 2. Аналізуючи дане графічне представлення, та враховуючи чисто практичні міркування, можна прийти до висновку, що достатньо обмежитись поштучним вимірюванням мас десяти листів. Тому, в подальшому ми приймали k = 10. При довірчій ймовірності $\gamma = 0{,}95$ коефіцієнт Стьюдента $t_{\gamma,k} = 2{,}26$.

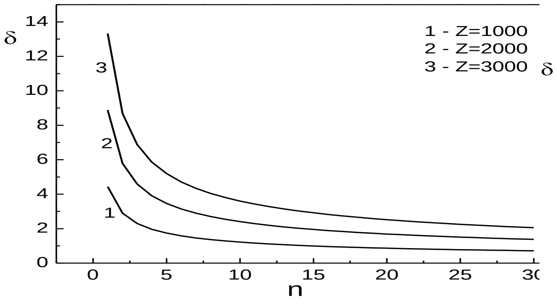

Рис. 1. Залежність довірчої межі похибки загальної кількості листів у стосі від кількості листів у малій вибірці для паперу з щільністю 210 г/м^2

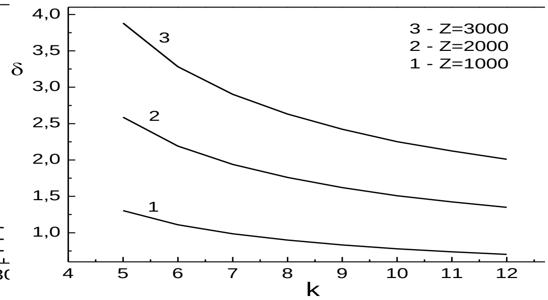

Рис. 2. Залежність довірчої межі похибки загальної кількості листів у стосі від кількості листів з поштучним вимірюванням маси для паперу з щільністю 210 г/м^2

2.3. Залежність довірчої межі похибки δ від загальної кількості Z паперу у стосі наведено на рис. 3 для усіх сортів паперу, зазначених в таблиці 1. З графічного представлення видно, що при збільшенні величини Z від 1000 до 4000 листів, довірча межа похибки δ зростає в 3 – 4 рази.

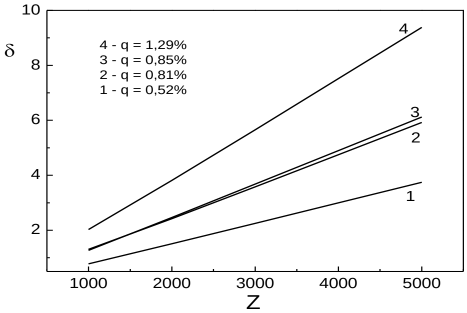

Рис. 3. Залежність довірчої межі похибки δ від загальної кількості листів Z у стосі для сортів паперу з різними коефіцієнтами варіації при n = 25 та k = 10.

2.4. Залежність довірчої межі похибки δ від коефіцієнта варіації q, для різної кількості Z паперу, наведена на рис. 4. Це графічне представлення проведено тільки для одного сорту паперу з $\overline{\mu}$ = 80,6 г. Таким графіком зручно користуватись при швидкій оцінці довірчої межі похибки δ різних, отриманих за формулою (1), значень кількості листів, попередньо розрахувавши коефіцієнт варіації маси одного листа з (18), враховуючи (13) та (16).

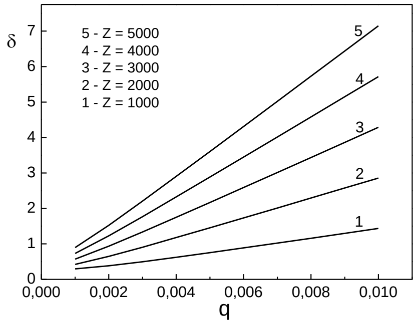

Рис. 4. Залежність довірчої межі похибки δ від загальної кількості листів у стосі від коефіцієнта варіації маси одного листа для паперу з щільністю 210 г/м^2

Для того, щоб користуватись методикою швидкої оцінки довірчої межі похибки δ при довірчій ймовірності γ, потрібно попередньо побудувати свій каскад графіків залежності δ від q (при різних значеннях Z) для певного значення маси одного листа, пачки якого були замовлені. Користуватись такими графіками можна, отримуючи папір від різних постачальників, у яких один і той же сорт паперу має різні коефіцієнти варіації маси одного листа.

Висновки. При визначенні довірчої межі похибки кількості листів у стосі лічильними вагами на вібрознштовхувачах оптимальна кількість малої вибірки становить 25 листів.

При розрахунках коефіцієнта варіації qмаси одного листа можна обмежитись поштучним вимірюванням маси десяти листів (k = 10). Отже, при довірчій ймовірності $\gamma = 0{,}95$ коефіцієнт Стьюдента $t_{\gamma,k} = t_{0{,}95;10}$ = 2,26.

Для зменшення довірчої межі похибки δ загальної кількості Z листів потрібно брати пачки з меншим Z, тому що при збільшенні величини Z від 1000 до 4000 листів довірча межа похибки δ зростає в 3 – 4 рази.

Точність оцінки кількості листів паперу (в розглянутих випадках) в основному визначається коефіцієнтом варіації маси одного листа. Для швидкої оцінки довірчої межі похибки δ кількості листів у стосі пропонується для кожного сорту паперу будувати графік у вигляді каскаду ліній, які відображають залежність δ від коефіцієнта варіації q маси одного листа при різних дискретних значеннях загальної кількості Z листів. Цим графіком можна користуватись, працюючи з певним сортом паперу від різних виробників.

Література

1. *О.Р. Казьмірович, Б.В. Дурняк, А.Д. Кульчицький* Аналіз точності визначення кількості аркушів у стосі лічильними вагами на вібрознштовхувачах. Тези доповідей VII міжнародної науково-технічної конференції Інформаційні технології друкарства. 2018. – С. 136 – 138.
2. *Дрогомирецька Х.Т.* Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посібник / Х.Т. Дрогомирецька, О.М. Рибицька, О.З. Слюсарчук, Н.В. Пабирівська, Л.В. Гошко, О.В. Веселовська, Д.В. Білонога. – Львів: Видавництво Львівська Політехніка, 2012. – 396 с.

Measurement error on the number of sheets of the paper on the vibratory feeder

Antonii Kulchytskyi, Andriy Pushak

The work includes an analysis of the accuracy of estimating the determined quantity of paper sheets on vibratory conveyors from the perspective of probability theory and mathematical statistics. A resulting formula for determining the confidence interval of measurement error was obtained. It was found that for paper with a coefficient of variation in the range of 0.52%–1.29% (with a total number of sheets of 4000), the confidence interval of error due to the weight non-uniformity of sheets exceeds the confidence interval of error due to inaccuracies in large and small weights by approximately 5 times. Thus, the accuracy of estimating the quantity of paper sheets (in the cases considered) is mainly determined by the coefficient of variation in the mass of one sheet. For a quick estimation of the confidence interval of the quantity of sheets in a stack, it is proposed (for a specific type of paper) to construct a graph in the form of a cascade of lines (at various discrete values of the total number of sheets), which reflects the dependence of this quantity on the coefficient of variation in the mass of one sheet. This graph is convenient to use when working with a certain type of paper from different manufacturers.

Keywords: *measurement error, vibratory feeder, coefficient of variation, sample, dispersion.*

Отримано 15.03.24.