УДК 511.4
DOI10.15407/fmmit2023.38.135

Представлення кубічної ірраціональності за допомогою суми двох періодичних гіллястих ланцюгових дробів.

Михайло Фис[1], Ігор Демків[2], Ярослав Пелех[3]
[1]д-р техн. наук, професор, Національнийуніверситет ”Львівськаполітехніка”, вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна, e-mail: mykhailo.m.fys@lpnu.ua
[2]д-р. фіз.-мат. наук, професор, Національнийуніверситет ”Львівськаполітехніка”, вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна, e-mail: ihor.i.demkiv@lpnu.ua
[3]канд. фіз.-мат. наук, доцент, Національнийуніверситет ”Львівськаполітехніка”, вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна, e-mail: yaroslav.m.pelekh@lpnu.ua

У роботі створюється такий алгоритм, що представляє кубічну ірраціональність за допомогою суми двох періодичних гіллястих ланцюгових дробів.Доводиться єдиність та збіжність цихдробів. Логічно допускається, що ірраціональності вищих порядків безпосередньо пов'язані з порядком алгебраїчного рівняння. Однак такої простої процедури побудови відповідного незвідного рівняння важко запропонувати по тій простій причині, що не існує замкнутих формул для коренів вище ступеня чотири. Та і існуючі для 3, 4 порядків формули є малопридатні для побудови рівняння, що відповідає заданій ірраціональності. Тому в подальшому запропонуємо простий спосіб побудови відповідного незвідного рівняння та на його основі виконаємо необхідні дослідження.

Ключові слова:неперервний ланцюговий дріб, алгебраїчна ірраціональність, періодичний гіллястий ланцюговий дріб, кубічна ірраціональність.

Вступ. Згідно [1] першим відомим використанням неперервних дробів є наближення для $\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6+\frac{4}{6+\ddots}}$, яке дав Р. Бомбеллі в 1572 р. Це частковий випадок формули

$$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a+\frac{b}{2a+\ddots}}. \tag{1}$$

Другий частковий випадок (1) дослідив П. Каталді в 1613 р. для

$$\sqrt{18} = 4 + \frac{2}{8+\frac{2}{8+\cdots}}.$$

Нагадаємо, що неперервний ланцюговий дріб має вигляд

$$D = b_0 + \frac{a_1}{b_1+\frac{a_2}{b_2+\ddots+\frac{a_n}{b_n+\ddots}}},$$

а скінчений (n – підхідний) дріб

$$D_n = \frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1+\frac{a_2}{b_2+\ddots+\frac{a_n}{b_n}}}, \quad D_0 = b_0.$$

Для зручності ці дроби можна записати в одній з наступних форм

$$D_n = \frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}.$$

Якщо для квадратичної ірраціональності $z = \sqrt{p}$, $p \in N$практично вирішене питання її зображення ланцюговими дробами, то для вищих степенів воно залишалося відкритим. Тут доречно привести витяг з короткої монографії О.Я Хінчіна[2, стор. 65, 1961 р.]: «Цікаво, відзначити, що до цього часу невідомо розкладання в ланцюговий дріб жодного числа ступеня вище 2….Взагалі, питання, пов'язані з розкладанням алгебраїчних чисел вище другого ступеня в ланцюгові дроби, виключно важкі і майже не вивчені».

Застосування апарату гіллястих ланцюгових дробів до проблеми алгебраїчних ірраціональностей дало позитивний результат [3].

Означення 1. *Число α називається алгебраїчною ірраціональністю степеняn, якщо воно задовольняє незвідне алгебраїчне рівняння степеняn.*

Означення 2. *Гіллястий ланцюговий дріб називається періодичним, якщо починаючи з якогось його поверху усі компоненти періодично повторюються.*

Зрозуміло, що якщо періодичний гіллястий ланцюговий дріб є одночасно і збіжним, то величина α цього дробу є коренем алгебраїчного рівняння досить високого степеню [3].

Теорема 1 [4], [5]. *Будь-яка дійсна алгебраїчна ірраціональність розкладається в періодичний гіллястий ланцюговий дріб вигляду*

$$b_0 + \cfrac{a_{01}}{b_1 + \cfrac{a_{11}}{b_1 + \cfrac{a_{11}}{b_1+\ddots} + \cdots + \cfrac{a_{1k}}{b_k+\ddots}} + \cdots + \cfrac{a_{1k}}{b_k + \cfrac{a_{k1}}{b_1+\ddots} + \cdots + \cfrac{a_{kk}}{b_k+\ddots}}}, \tag{2}$$

де $b_0 = [\alpha]$ –найбільша ціла частина числа α; b_j, a_{ij} $(i,j = 1,2,\cdots,k)$ –цілі числа; $k+1 = n$ –степінь ірраціональності.

”Питання збіжності являє собою цікаву і важливу математичну задачу, яка ще не розв’язана”[3, стор. 46].

1. Зображення квадратичної ірраціональності ланцюговими дробами.

Спочатку розглянемо квадратичну ірраціональність $z = \sqrt{p}$, $p \in N$.

Зокрема, приймемо $p = a_2^2 + a_3$. Цезавждиможназробити, наприклад,$a_2 = 1, a_3 = p - 1$. Тоді квадратичну ірраціональність можна пов’язати з квадратним рівнянням:

$$u^2 - 2a_2u - a_3 = 0\,. \tag{3}$$

Якщо маємо два раціональних корені $\overline{u}$та $\overline{\overline{u}}$рівняння (3), тоді ірраціональність $\sqrt{p}$рівна одному з нихмінус a_2, наприклад, $\sqrt{p} = \overline{u} - a_2$.

У іншому випадку розв’язування рівняння (2) можна звести до обчислення виразу

$$z = 2a_2 + \frac{a_3}{z} \tag{4}$$

ланцюговим дробом. У праву частину (4) будемо повторно підставляти значення z, що приводить до ланцюгового дробу [3]:

$$z = 2a_2 + \cfrac{a_3}{2a_2 + \cfrac{a_3}{2a_2 + \cfrac{a_3}{2a_2+\ddots}}} \tag{5}$$

Перетворимо ланцюговий дріб (5) в еквівалентний за алгоритмом, що описаний в [3, стор.7].

Маємо

$$z = 2a_2 + \frac{1}{\frac{2a_2}{a_3} + \frac{1}{2a_2 + \frac{1}{\frac{2a_2}{a_3} + \ddots}}} \qquad (6)$$

При обчисленнях треба підбирати числа a_2, a_3 так щоб ланцюговий дріб (6) був збіжним. За теоремою 1.2 (Зейделя) [див. 3, с.10], ланцюговий дріб (6) з додатними компонентами ($a_2, a_3 > 0$) буде збіжним,бо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 2a_2\left(1 + \frac{1}{a_3}\right)$ є розбіжним.

Його обчислення зручно виконувати за допомогою рекурентних формул наступного вигляду: $z_{n+1} = 2a_2 + \frac{a_3}{z_n}, z_0 = 2a_2$.

*Приклад 1.*Розкласти $\sqrt{3}$ у ланцюговий дріб.

Випадок 1. Маємо $\sqrt{3} = \sqrt{1+2}, a_2 = 1, a_3 = 2, \sqrt{3} = -1 + \tilde{z}$, тоді

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \cdots}}}.$$

Випадок 2. Цей дріб можна одержати іншим способом. Квадратичну ірраціональність можна пов'язати з іншим квадратним рівнянням, наприклад: $u^2 = 3$. Тоді маємо $u = 1 + \frac{2}{1+u}$, або

$$u = 1 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \cdots}}}.$$

Одержали той самий дріб.

2. Постановка задачі

На основі розглянутого вище матеріалу поставимо наступне завдання. Створити такий алгоритм, що представляє кубічну ірраціональність за допомогою гіллястих ланцюгових дробів, довести єдиність та збіжність цього дробу.

Логічно допустити, що ірраціональності вищих порядків безпосередньо пов'язані з порядком алгебраїчного рівняння. Однак такої простої процедури побудови відповідного незвідного рівняння важко запропонувати по тій простій причині, що не існує замкнутих формул для коренів вище ступеня чотири. Та і існуючі для 3, 4 порядків формули є малопридатні для побудови рівняння, що відповідає заданій ірраціональності. Тому в подальшому запропонуємо простий спосіб побудови відповідного незвідного рівняння та на його основі виконаємо необхідні дослідження.

3. Зображення кубічної ірраціональності ланцюговими дробами.

Детально проаналізуємо подану методику для кубічної ірраціональності, тобто опишемо алгоритм для знаходження $z = \sqrt[3]{p},\ \ p \in N$.

Зробимо заміну змінної: $z = \propto + a$,де $a = -1, -2, \dots, -\left[\sqrt[3]{p}\right]$, $\left[\sqrt[3]{p}\right]$ – найбільша ціла частина. Піднімемо до кубу:

$$\propto^3 + 3\propto^2 \mathrm{a} + 3\propto \mathrm{a}^2 + \mathrm{a}^3 = \mathrm{p}$$

Звідкиодержимо рекурентні формули

$$\propto = -3a - \frac{3\mathrm{a}^2}{\propto} + \frac{\mathrm{p}-\mathrm{a}^3}{\propto^2} = a1 + \frac{\mathrm{a}2}{\propto} + \frac{\mathrm{a}3}{\beta}. \tag{6}$$

Помножимо (6) на $\propto$.

$$\beta = \propto^2 = -3a\left(-3a - \frac{3\mathrm{a}^2}{\propto} + \frac{\mathrm{p}-\mathrm{a}^3}{\propto^2}\right) - 3\mathrm{a}^2 + \frac{\mathrm{p}-\mathrm{a}^3}{\propto} =$$

$$= 6\mathrm{a}^2 + \frac{8\mathrm{a}^3+p}{\propto} + \frac{3a(\mathrm{a}^3-\mathrm{p})}{\propto^2} = b1 + \frac{b2}{\propto} + \frac{b3}{\beta}. \tag{7}$$

Підставляючи повторно (6), (7) в (6) одержимо суму двох ланцюгових дробів з двома розгалуженнями. Покажемо дріб з чотирма поверхами

$$z = -2a +$$

$$+\frac{\mathrm{a}2}{a1+\frac{\mathrm{a}2}{a1+\frac{\mathrm{a}2}{a1+\frac{\mathrm{a}2}{\propto}+\frac{\mathrm{a}3}{\beta}}+\frac{\mathrm{a}3}{b1+\frac{b2}{\propto}+\frac{b3}{\beta}}}+\frac{\mathrm{a}3}{b1+\frac{b2}{a1+\frac{\mathrm{a}2}{\propto}+\frac{\mathrm{a}3}{\beta}}+\frac{b3}{b1+\frac{b2}{\propto}+\frac{b3}{\beta}}}}+ \tag{8}$$

$$+\frac{\mathrm{a}3}{b1+\frac{b2}{a1+\frac{\mathrm{a}2}{a1+\frac{\mathrm{a}2}{\propto}+\frac{\mathrm{a}3}{\beta}}+\frac{\mathrm{a}3}{b1+\frac{b2}{\propto}+\frac{b3}{\beta}}}+\frac{b3}{b1+\frac{b2}{a1+\frac{\mathrm{a}2}{\propto}+\frac{\mathrm{a}3}{\beta}}+\frac{b3}{b1+\frac{b2}{\propto}+\frac{b3}{\beta}}}}.$$

З побудови випливає, що при конкретно вибраному a представлення кубічної ірраціональності (8) є єдиним.

Приклад.Розкласти $\sqrt[3]{2}$ у ланцюговий дріб. $\sqrt[3]{2}$ =-1+$\propto$, $p = 2, a = -1$.

$$\sqrt[3]{2} = -1 + \propto = 2 +$$

$$-\frac{3}{3+\frac{-3}{3+\frac{-3}{3+\frac{-3}{\propto}+\frac{3}{\beta}}+\frac{3}{6+\frac{-6}{\propto}+\frac{9}{\beta}}}+\frac{3}{6+\frac{-6}{3+\frac{-3}{\propto}+\frac{3}{\beta}}+\frac{9}{6+\frac{-6}{\propto}+\frac{9}{\beta}}}}+$$

$$+\frac{3}{6+\frac{-6}{3+\frac{3}{3+\frac{-3}{\propto}+\frac{3}{\beta}}+\frac{3}{6+\frac{-6}{\propto}+\frac{b3}{\beta}}}+\frac{9}{6+\frac{-6}{3+\frac{-3}{\propto}+\frac{3}{\beta}}+\frac{9}{6+\frac{-6}{\propto}+\frac{9}{\beta}}}}.$$

Маємо $\sqrt[3]{2} = 1{,}25992104991038$.

Виникає питання збіжності ланцюгового дробу, отриманого за формулами (6),(7). Для цього можна скористатись ознаками збіжності гіллястого ланцюгового дробу. Ми, однак, застосуємо інший підхід, який базується на ітераційному методі. Його суть полягає в наступному: обчислення ланцюгового дробу(як простого, так і гіллястого) здійснюється знизу до верху. Тому періодичний ланцюговий дріб можна розглядати, як ітераційний процес. Тобто, маючи деяке початкове значення підстановкою шукаємо за формулою нове, повторно за ним наступне тощо до досягнення потрібної точності Тобто обчислення можна подати таким чином:

$$\propto_{m+1} = -3a - \frac{3\mathrm{a}^2}{\propto_m} + \frac{\mathrm{p}-\mathrm{a}^3}{\beta_m}, \propto_0 = -3a, \tag{9}$$

$$\beta_m = {\propto_m}^2 = 6\mathrm{a}^2 + \frac{8\mathrm{a}^3+p}{\propto_m} - \frac{3a(\mathrm{p}-\mathrm{a}^3)}{{\propto_m}^2}, \quad m = 0,1 \dots . \tag{10}$$

Дослідимо поведінку функції $f(\propto)$.

Маємо $f(\propto) = -3a - \frac{3a^2}{\propto} + \frac{p-a^3}{\beta}$. Розглянемо випадок $a < 0$, тоді $p - a^3 > 0$,
$\propto > |a|$, $f'(\propto) = \frac{1}{\propto^2}\left(3a^2 + \frac{(p-a^3)\left(8a^3+p-\frac{3a(p-a^3)}{\propto}\right)}{\beta^2}\right)$.
Очевидно, що $|f'(\propto)| < 1$. Одержали наступну теорему.

Теорема 2. *Кубічну ірраціональність можна представити сумою двох ланцюгових дробів з двома розгалуженнями вигляду (8). При цьому а може приймати одне із наступних значень* $a = -1, -2, \dots, -\left[\sqrt[3]{p}\right]$, $\left[\sqrt[3]{p}\right]$ *– найбільша ціла частина числа* $\left[\sqrt[3]{p}\right]$. *При фіксованому а розклад єдиний та збіжний.*

Приклад 2.
А) обчислити $z = \sqrt[3]{27}$

A	A=-1	A=-2	A=-3	A=-7
Z	2,9999999999	3,0000000000	3,0000000000	3,50000000024513

Б) обчислити $z = \sqrt[3]{75}$

A	A=-1	A=-2	A=-3	A=-4	A=-10
Z	4,217163326 49005	4,217163326 50018	4,217163326 52317	4,217163326 52973	5,000000000 22512

Висновк. Поданий алгоритм дає можливість представляти ірраціональність третього порядку з застосуванням гіллястих ланцюгових дробів, а їх обчислення з використанням рекурентних співвідношень дозволяє виконувати їх з довільною наперед заданою точністю.

Література.

[1] Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическаятеория и приложения. Пер. С англ. — М.; Мир, 1985. — 414 с.
[2] Хинчин А.Я. Цепные дроби. — М.; Наука, 1961, — 112 с.
[3] Боднарчук П.І., Скоробогатько В.Я. Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. — К.: Наукова думка, 1974, — 271 с.
[4] Пасічняк Ф.О. Розклад алгебраїчних ірраціональностей будь-якого степеня в гіллясті ланцюгові дроби. — В кн. Тези доповідей п'ятої наукової конференції молодих математиків України. Інститут математики АН УРСР, К., 1970.
[5] Пасічняк Ф.О. Розклад кубічної алгебраїчних ірраціональності в гіллясті ланцюгові дроби. — ДАН УРСР, 1971, 6, 511.

Representationofcubicirrationalityusingthesumoftwoperiodicbranchedchainfractions

Mykhailo Fys, IhorDemkiv, Yaroslav Pelekh

The paper creates such an algorithm that represents cubic irrationality using the sum of two periodic branched chain fractions. The unity and convergence of these fractions are proved. It is logically assumed that the irrationalities of higher orders are directly related to the order of the algebraic equation. However, it is difficult to propose such a simple procedure for constructing the corresponding irreducible equation for the simple reason that there are no closed formulas for roots higher than degree four. And the existing formulas for the 3rd and 4th orders are not very suitable for constructing an equation that corresponds to the given irrationality. Therefore, in the future, we will propose a simple way of constructing the corresponding irreducible equation and perform the necessary research on its basis.

Keywords: continuous chain fraction, algebraic irrationality, periodic branched chain fraction, cubic irrationality.

Отримано: 11.12.2023