УДК 539.3
DOI 10.15407/fmmit2023.38.128

Порівняльний аналіз апроксимації похідних дробових порядків Капуто та Рімана-Ліувіля в базисах біортогональних многочленів

Ярослав П´янило[1,2], Валентина Собко[1], Галина П´янило[1], Адріан Торський[1]

1 Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, м. Львів, Україна
2. Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013,

На базі модельної задачі проведено порівняльний аналіз використання спектрального методу в базисі ортогональних многочленів обчислення похідних дробових порядків Капуто та Рімана-Ліувіля. Проаналізовано швидкість збіжності апроксимації.

Ключові слова: похідних дробових порядків, біортогональні многочлени, апроксимація функцій, числовий аналіз.

Вступ. Дробові похідні все більше застосовуються в побудові математичних моделей різного роду процесів. Застосування похідних дробового порядку дозволяють в процесі моделювання враховувати або пам´ять процесу, або фрактальну структуру середовища, в якому моделюються процеси. Незважаючи на значну кількість робіт за тематикою досліджень похідних дробових порядків, питанням застосовності певного виду похідної та дослідженню стійкості та швидкості обчислювальних процесів присвячена незначна кількість робіт. З аналізу наявних робіт стосовно застосуванню похідних дробових порядків випливає, що найбільш застосовними є похідні дробових порядків Капуто та Рімана-Ліувіля. Питанням якого виду похідні дробових доцільно використовувати для моделювання процесів мачслпереносу ще є невивченими.
Відомо, що для розв´язування крайових задач широкого застосування набули спектральні методи в ортогональних та біортогональних базисах. Сумування рядів в цих базисах є класичною некоректною задачею. Регуляризація задач такого типу шляхом побудови регуляризуючого параметру не завжди можливе та ефективне. Одним із методів є так звана неявна регуляризація, яка полягає в тому, що використовуються такі базиси або їх узагальнення, які дають необхідний результат при малих значеннях часткових сум відповідних рядів [1-3].

Метою роботи є дослідження застосування біортогональних розкладів для обчислення дробових похідних в термінах Капуто та Рімана-Ліувіля стосовно точності та швидкості збіжності.

Визначення дробових похідних.

У літературі введено декілька видів дробових похідних та інтегралів. Найбільш вживаними є дробові похідні в термінах Капуто та Рімана-Ліувіля. Оператор дробової похідної у термінах Капуто визначається так [4-6]:

$$cD_\tau^\alpha = \frac{c\partial^\alpha}{\partial\tau^\alpha}\varphi(\tau) := \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)}\int_0^\tau \frac{\left(\frac{\partial^{m+1}}{\partial\xi^{m+1}}\varphi(\xi)\right)}{(\tau-\xi)^{\alpha-m}}d\xi, \qquad (1)$$

де $m = [\alpha], \ldots, [\cdot]$— ціла частина дійсного числа, а в термінахРіммана-Ліувіля —

$$D_t^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\varphi(t) := \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)}\frac{\partial^{m+1}}{\partial\xi^{m+1}}\int_0^t \frac{\varphi(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha-m}}d\xi. \qquad (2)$$

Біортогональні многочлени, побудовані на базі многочленів Чебишева визначаються наступним чином.

Твердження. Многочлени $\varphi_i(x)$, $\bar{\varphi}_i(x)$ та $\psi_i(x)$, $\bar{\psi}_i(x)$, $i = 1..n$ утворюють біортогональні системи функцій з вагою $\omega(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ на проміжку $[-1,1]$. Поліноми $\varphi_i(x)$ та $\bar{\varphi}_i(x)$ такі, що $\int_{-1}^1 \varphi_i(x)dx = 0$ та $\int_{-1}^1 \omega(x)\bar{\varphi}_i(x)dx = 0$. Поліноми $\psi_i(x)$ та $\bar{\psi}_i(x)$ володіють властивостями $\psi_i(-1) = \psi_i(1) = 0$, $\bar{\psi}_i(-1) = \bar{\psi}_i(1) = 0$.

Справедливими є наступні рівності

$$\int_{-1}^1 \omega(x)\varphi_i(x)\bar{\varphi}_j(x)dx = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ \sigma_i, i = j, \end{cases} \quad \text{та} \quad \int_{-1}^1 \omega(x)\psi_i(x)\bar{\psi}_j dx = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ -\lambda_i\sigma_i, i = j. \end{cases}$$

Причому,

$$\psi(x) = \int_{-1}^x \varphi(x_1)dx_1 \quad \text{та} \quad \psi(x) = -\sqrt{1-x^2}\int_{-1}^x \bar{\varphi}(x_1)/\sqrt{1-x_1^2}\,dx_1 .$$

Отримані результати. Аналіз розв´язків задач газогідродинаміки показує, що досить часто їх скаловими є функції виду $f(x) = x^\alpha e^{-\beta x^\gamma}$, де α, β, γ - деякі числа. У зв'язку з тим для апробації виберемо функцію

$$F(X) = \sqrt{X}e^{-0.5\sqrt{X}}, \qquad (3)$$

де

$$\frac{dF(X)}{dX} = \frac{e^{-0.5\sqrt{X}}}{2\sqrt{X}} - \frac{1}{4}e^{-0.5\sqrt{X}}. \qquad (4)$$

Знайдемо дробову похідну у термінах Капуто, яка обчислюється за формулою (1). У разі $\alpha = 1$ дробова похідна Капуто переходить у звичайну похідну (4).

Оскільки, дробову похідну ми будемо шукати, використовуючи біортогональні многочлени, побудовані на базі многочленів Чебишова, які є ортогональними на проміжку $[-1,1]$, а дробова похідна Капуто розглядається на проміжку $[0,\tau]$, то шляхом лінійної заміни перейдемо до проміжку ортогональності $[-1,1]$.

$$X = \frac{(x+1)\tau}{2},\ -1 \leq x \leq 1,\ F(X) = F\left(\frac{(x+1)\tau}{2}\right) = f(x),$$

$$\frac{dx}{dX} = \frac{2}{\tau},\ \frac{dF(X)}{dX} = \frac{2}{\tau}\frac{df(x)}{dx}.$$

Дістанемо для $m = 0$,

$$cD_\tau^\alpha = \frac{c\partial^\alpha}{\partial\tau^\alpha}\varphi(\tau) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{\tau}{2}\right)^{(1-\alpha)}\int_{-1}^{1}\frac{\frac{2}{\tau}\frac{df(x)}{dx}}{\sqrt{1-x^2}}\frac{\sqrt{1-x^2}}{(1-x)^\alpha}dx. \quad (5)$$

У формулі (5), введемо позначення

$$N(x,\tau) = \frac{2}{\tau}\frac{df(x)}{dx} \text{ та } V(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1-x)^\alpha}.$$

Функцію $V(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1-x)^\alpha}$ розкладемо в ряд по поліномах $\overline{\varphi_i}(x)$, де

$$\int_{-1}^{1}\frac{\overline{\varphi_i}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0.$$

Отже,

$$v_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{V(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

$$v_i = \int_{-1}^{1}\frac{V(x)-v_0}{\sqrt{1-x^2}}\varphi_i(x)dx \Big/ \int_{-1}^{1}\frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi}_i(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx, \ i = \overline{1,n}\ .$$

Дістанемо,

$$V(x) = v_0 + \sum_{i=1}^{n} v_i\overline{\varphi_i}(x) \quad (6)$$

Функцію $N(x,\tau) = \frac{2}{\tau}\frac{df(x)}{dx}$ розкладемо в ряд по поліномах $\varphi_i(x)$, де

$$\int_{-1}^{1}\varphi_i(x)dx = 0.$$

Отже,

$$n_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}N(x,\tau)dx,$$

$$n_i = \int_{-1}^{1}\frac{N(x,\tau)-n_0}{\sqrt{1-x^2}}\overline{\varphi_i}(x)dx \Big/ \int_{-1}^{1}\frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi}_i(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx, \ i = \overline{1,n}\ .$$

Дістанемо,

$$N(x,\tau) = n_0 + \sum_{i=1}^{n} n_i\varphi_i(x)\ . \quad (7)$$

Оскільки, функції $\varphi_i(x)$ та $\overline{\varphi_i}(x)$ є біортогональними, то

$$\int_{-1}^{1}\frac{V(x)N(x,\tau)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{V(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\int_{-1}^{1}\frac{N(x,\tau)}{\sqrt{1-x^2}}dx + \quad (8)$$
$$+\sum_{i=1}^{n} n_i v_i\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi}_i(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Отриманий результат (8) підставимо у (5) і дістанемо значення дробової похідної.

Обчислювальний експеримент Обчислення для функції (3) здійснюються за допомогою квадратур Гауса із 32 – вузлами. Результати обчислень подані на рис.1.

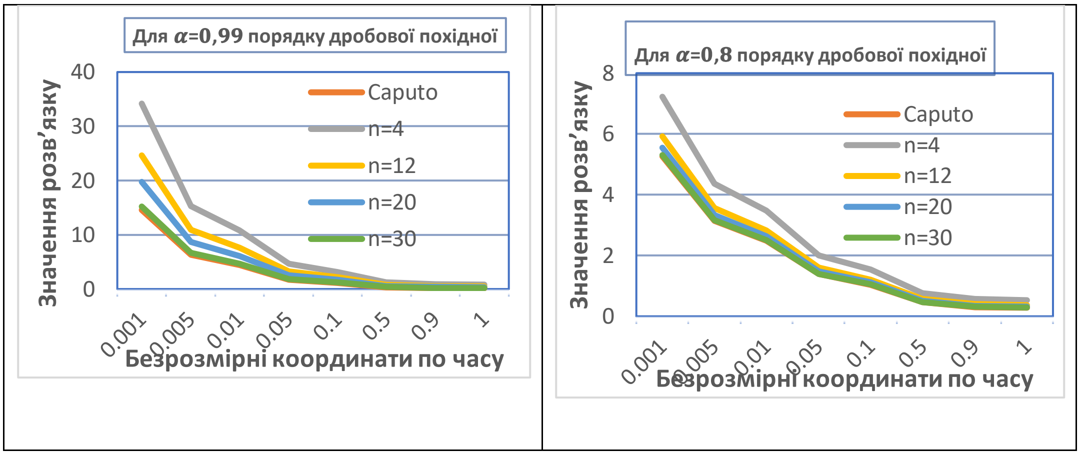

Рис.1. Точне значення похідної Капуто та значення, обчислені на базі біортогональних многочленів для різних значень порядку та кількості доданків.

Знайдемо дробову похідну функції (3) у термінах Рімана-Ліувіля, яка обчислюється за формулою (2). У разі $\alpha = 1$ дробова похідна Капуто переходить у звичайну похідну (4).

Якщо функція $F(X)$ така, що $F(0)$ =0, то дробова похідна Рімана-Ліувіля співпадає з похідною Капуто.

Оскільки, дробову похідну ми будемо шукати, викоритовуючи біортогональні многочлени, побудовані на базі многочленів Чебишова, які є ортогональними на проміжку $[-1,1]$, а дробова похідна Рімана-Ліувіля розглядається на проміжку $[0,\tau]$, то шляхом лінійної заміни перейдемо до проміжку ортогональності $[-1,1]$.

Дістанемо для $m = 0$,

$$D_\tau^\alpha = \frac{c\partial^\alpha}{\partial\tau^\alpha}\varphi(\tau) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{\tau}{2}\right)^{(1-\alpha)} \int_{-1}^{1} \frac{f(x,\tau)}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1-x)^\alpha} dx. \quad (9)$$

У формулі (9), введемо позначення

$$N(x,\tau) = f(x,\tau) \text{ та } V(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1-x)^\alpha}.$$

Як і у випадку знаходження похідної Капуто, для похідної Рімана-Ліувіля дістанемо,

$$V(x) = v_0 + \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{\varphi}_i(x) \quad (10)$$

Функцію $N(x,\tau) = f(x,\tau)$ розкладемо в ряд по поліномах $\varphi_i(x)$, де

$$\int_{-1}^{1} \varphi_i(x)dx = 0.$$

Отже,

$$n_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} N(x,\tau)dx,$$

$$n_i = \left. \int_{-1}^{1} \frac{N(x,\tau)-n_0}{\sqrt{1-x^2}} \overline{\varphi}_i(x)dx \middle/ \int_{-1}^{1} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi}_i(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \right., \ i = \overline{1,n}\ .$$

Дістанемо,

$$N(x,\tau) = n_0 + \sum_{i=1}^{n} n_i \varphi_i(x)\ . \quad (11)$$

Оскільки, функції $\varphi_i(x)$ та $\overline{\varphi}_i(x)$ є біортогональними, то

$$\int_{-1}^{1} \frac{V(x)N(x,\tau)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{V(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \int_{-1}^{1} \frac{N(x,\tau)}{\sqrt{1-x^2}} dx + \\ + \sum_{i=1}^{n} n_i v_i \int_{-1}^{1} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi}_i(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (12)$$

Отриманий результат (12) підставимо у (9) та, продиференціюємо по τ і дістанемо значення дробової похідної.

Обчислювальний експеримент для порівняння дробових похідних проводився для тих самих параметрів, що і раніше. Результати обчислень подані в таблицях.

Таблиця 1.

Значення розв'язку поставленої задачі для $\alpha = 0,99$ порядку дробової похідної від безрозмірних часу для різних значень n .

$t\backslash n$	**Rimana -Liuvilj**	**Rimana-Liuvilj**			**Caputo**	**Caputo**		
		n = 2	n = 6	n = 20		n = 8	n = 20	n = 30
0,001	**14,581**	14,237	14,529	14,577	**14,577**	28,266	19,754	15,213
0,005	**6,373**	6,216	6,349	6,371	**6,371**	12,592	8,724	6,660
0,01	**4,406**	4,294	4,389	4,404	**4,404**	8,834	6,080	4,610
0,05	**1,763**	1,713	1,756	1,763	**1,763**	3,776	2,524	1,856
0,1	**1,138**	1,102	1,133	1,138	**1,138**	2,571	1,680	1,204
0,5	**0,330**	0,314	0,327	0,330	**0,330**	0,981	0,576	0,360
0,9	**0,180**	0,168	0,178	0,180	**0,180**	0,668	0,364	0,202
1,0	**0,159**	0,148	0,157	0,158	**0,158**	0,622	0,334	0,180

Таблиця 2.

Значення розв'язку поставленої задачі для $\alpha = 0,8$ порядку дробової похідної від безрозмірних часу для різних значень n .

$t\backslash n$	**Rimana -Liuvilj**	**Rimana-Liuvilj**			**Caputo**	**Caputo**		
		n = 2	n = 6	n = 14		n = 8	n = 20	n = 30
0,001	**5,288**	5,231	5,282	5,287	**5,264**	6,311	5,549	5,307
0,005	**3,162**	3,127	3,158	3,161	**3,147**	3,793	3,323	3,174
0,01	**2,508**	2,480	2,505	2,508	**2,497**	3,021	2,639	2,518
0,05	**1,399**	1,382	1,398	1,399	**1,392**	1,716	1,480	1,405
0,1	**1,053**	1,039	1,051	1,053	**1,047**	1,310	1,118	1,058
0,5	**0,464**	0,456	0,463	0,464	**0,461**	0,623	0,505	0,467
0,9	**0,312**	0,305	0,311	0,312	**0,309**	0,445	0,346	0,315
1,0	**0,288**	0,282	0,288	0,288	**0,285**	0,417	0,321	0,291

Таблиця 3.

Значення дробової похідної CAPUTO та RIMANA-LIUVILJ для різних значень порядку дробової похідної від безрозмірних часу.

$t\backslash\alpha$	$\frac{df}{dt}$	CAPUTO				RIMANA-LIUVILJ			
		0,99	0,90	0,80	0,70	0,99	0,90	0,80	0,70
0,001	15,317	14,577	9,149	5,264	2,943	14,581	9,171	5,288	2,961
0,002	10,689	10,245	6,853	4,231	2,537	10,248	6,870	4,250	2,553
0,003	8,639	8,315	5,775	3,716	2,322	8,317	5,789	3,733	2,337
0,004	7,417	7,161	5,108	3,386	2,179	7,163	5,121	3,401	2,192
0,005	6,584	6,371	4,641	3,147	2,072	6,373	4,653	3,162	2,085
0,006	5,969	5,787	4,288	2,964	1,988	5,789	4,300	2,977	2,001
0,007	5,492	5,333	4,010	2,816	1,919	5,334	4,020	2,829	1,931
0,008	5,107	4,966	3,781	2,692	1,860	4,967	3,791	2,705	1,872
0,009	4,789	4,662	3,590	2,588	1,810	4,663	3,599	2,600	1,821
0,01	4,518	4,404	3,426	2,497	1,765	4,406	3,435	2,508	1,777
0,02	3,061	3,007	2,501	1,961	1,490	3,008	2,508	1,970	1,500
0,03	2,418	2,386	2,066	1,691	1,342	2,387	2,071	1,700	1,351
0,04	2,036	2,015	1,796	1,518	1,241	2,016	1,802	1,526	1,250
0,05	1,776	1,763	1,608	1,392	1,166	1,763	1,612	1,399	1,175
0,06	1,585	1,576	1,465	1,295	1,107	1,577	1,470	1,302	1,115
0,07	1,437	1,432	1,353	1,217	1,057	1,432	1,357	1,223	1,065
0,08	1,318	1,315	1,261	1,151	1,015	1,316	1,265	1,157	1,023
0,09	1,219	1,219	1,184	1,095	0,979	1,219	1,187	1,101	0,986
0,1	1,136	1,138	1,117	1,047	0,947	1,138	1,121	1,053	0,954
0,2	0,694	0,701	0,747	0,761	0,745	0,702	0,750	0,766	0,752
0,3	0,504	0,513	0,576	0,618	0,636	0,513	0,578	0,622	0,641
0,4	0,394	0,403	0,471	0,526	0,561	0,403	0,473	0,530	0,567
0,5	0,321	0,330	0,399	0,461	0,506	0,330	0,401	0,464	0,511
0,6	0,268	0,277	0,345	0,410	0,462	0,277	0,347	0,414	0,467
0,7	0,229	0,237	0,304	0,370	0,426	0,237	0,306	0,373	0,431
0,8	0,198	0,205	0,270	0,337	0,396	0,205	0,272	0,340	0,401
0,9	0,172	0,180	0,243	0,309	0,370	0,180	0,244	0,312	0,374
1,0	0,152	0,158	0,220	0,285	0,347	0,159	0,221	0,288	0,351

Висновки. Результати обчислень показують, що біортогональні многочлени дають кращу швидкість збіжності для похідної дробового порядку Рімана-Ліувіля. Таким чиниом в тому випадку, коли немає критерію вибору дробової похідної і виникають значні труднощі при їх обчисленні, доцільно використовувати похідну дробового порядку Рімана-Ліувіля.

ЛІТЕРАТУРА

1. П’янило Я.Д. Використання інтегральних перетворень Якобі та Чебишева–Лагерра для розв’язування інтегральних рівнянь // Доп. НАН України – 1998. – № 8. – С. 41–46.

2. Я.Д.П'янило Проекційно-ітераційні методи розв'язування прямих та обернених задач переносу. – Львів: Сплайн, 2011.-248 с.
3. Ярослав П'янило, Марія Васюник, Іван Васюник Використання многочленів Лагерра до спектрального методу розв'язування рівнянь у дробових похідних за часом // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2013. – Вип.17. – С. 163-167
4. *N. B. Lopuh and Ya. D. Pyanylo* Numerical analysis of models with fractional derivatives for gas filtration in porous media //J. Coupled Syst. Multiscale Dyn. 2, 15-19 (2014).
5. Pyanylo Ya., Bratash O., Pyanylo H. Solving of differential equations systems in the presence of fractional derivatives using the orthogonal polynomials. // Mathematical modeling and computing. – 2017. − Volume 4, Number 1. – pp. 87−95.
6. Ya. Pyanylo, V. Sobko, O. Bratash The mass transfer research in complex porous media and pipelines by spectral methods MMC. 2017; Volume 4, Number 2 pp. 187-196

Comparative analysis of the approximation of derivatives of Caputo and Riemann-Liouville fractional orders in the bases of biorthogonal polynomials

Yaroslav Pyanylo, Valentina Sobko, Halyna Pyanylo, Adrian Torskyi

On the basis of the model problem, a comparative analysis of the use of the spectral method in the basis of orthogonal polynomials for calculating the derivatives of fractional orders of Caputo and Riemann-Liouville was carried out. The rate of convergence of the approximation was analyzed.

Keywords: derivatives of fractional orders, biorthogonal polynomials, approximation of functions, numerical analysis.

Отримано: 04.12.2023.