УДК 796.056.24:796.332
DOI 10.15407/fmmit2023.38.041

Один із підходів до моделювання процесу поширення крові в м’яких тканинах живих організмів

Ярослав П’янило[1,2], Анатолій Лопатьєв[1,3], Ганна Лянце[1], Андрій Власов[3], Юрій Хоркавий[4]

1 Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, м. Львів, Україна
2. Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013,
3 Львівський державний університет фізичної культури імені Івана Боберського, м. Львів, Україна
4 Львівський національний медичний університет імені Данила Галицького, м. Львів, Україна

Запропоновано підхід до побудови математичної моделі розподілу тиску в м'яких тканинах живих організмів. М'які тканини моделюються пористим середовищем, яке має форму порожнистого циліндра певної довжини та радіусів. Рух рідини, яка міститься в пористому середовищі описується рівнянням фільтрації за заданих крайових умов. Проведено числовий експеримент, результати якого якісно співпадають з реальними процесами.

Ключові слова. Поширення крові, математичне моделювання, крайові задачі, методи розв’язування.

Вступ. Кровоносні судини є закритою системою трубок, по яких кров тече від серця до тканин і знову до серця. Рух крові здійснюється судинами під дією сил, що зумовлені нагнітальною функцією серця. Опір кровоплину менше залежить від в’язкості крові, а найбільше зумовлений діаметром судин, переважно артеріол. Судини поділяються на аорту, артерії, артеріоли, капіляри, венули, вени, порожнисті вени та характеризуються діаметром просвіту, товщиною стінки, загальною площею поперечного перерізу, вмістом крові [1-4]. Наша увага буде в основному прикута до капілярів, які мають діаметр просвіту 5 мкм, товщину стінки 1 мкм (10–6 м). Стінка всіх артерій складається з трьох оболонок: зовнішня оболонка сполучної тканини (адвентиція); середня оболонка гладких м’язів (медіа); внутрішня, що містить ендотелій та сполучну тканину (інтима). У стінках аорти та інших магістральних артерій є порівняно багато еластичних волокон. Вони розтягуються під час систоли і набувають попереднього стану під час діастоли. Стінка артеріол має менше еластичних волокон і набагато більше гладких м’язів. М’язові тканини за рахунок зв’язків з нервовими волокнами мають властивість розширювати або звужувати судини, що забезпечує опір течії крові, деякі зміни їхнього просвіту зумовлюють значні порушення загального периферійного опору. Артеріоли розділяються на менші судини з м’язовою стінкою, які відповідно переходять у капіляри. Діаметр капілярів становить приблизно 5 мкм на артеріальному кінці та 9 мкм на венозному. Загальна площа стінок капілярів у дорослої людини перевищує 6300 м^2. У будь-який час тільки 5 % крові, що циркулює міститься в капілярах, однак ці 5 % є в деякому розумінні найбільш важливою частиною об’єму крові, оскільки саме через стінки капілярів кисень та поживні речовини проникають в інтерстиційну рідину, а вуглекислий газ і продукти метаболізму повертаються в кровообіг. Обмін, що відбувається через капілярну стінку є життєво важливим для тканин. Отримати точні показники тиску крові та течії в капілярах проблематично. Стінка капіляра є тонкою мембраною, що складається з ендотеліальних клітин. Транспортування через капіляри може відбуватися за допомогою дифузії та фільтрації. Дифузія є кількісно набагато важливішою щодо часу обміну поживних речовин і продуктів метаболізму між кров’ю і тканиною. Концентрація кисню і глюкози у крові є вищою, ніж у інтерстиційній рідині, і тому ці речовини дифундують в інтерстиційну рідину, тоді як вуглекислий газ рухається у протилежному напрямі. Рівень фільтрації у будь-якому місці капіляра залежить від рівноваги сил, які називають силами Старлінга. Однією з цих сил є відмінний у різних органах. Інша сила – градієнт осмотичного тиску через стінку капіляра (різниця колоїдного осмотичного тиску плазми та колоїдного осмотичного тиску інтерстиційної рідини). У тканинах, що перебувають у стані спокою, кров переважно тече через сполучні судини з артеріол у венули. Капілярний тиск може значно змінюватися, у деяких капілярах він становить 32 мм рт.ст. на артеріальному кінці та 15 мм рт.ст. на венозному. Капіляри є короткими, однак кров рухається повільно (приблизно 0,07 см/с), оскільки загальна площа поперечного перерізу велика. Час проходження крові від артеріального до венозного кінця у капілярі середнього розміру становить 1–2 с. Для математичного моделювання процесу поширення крові в м'яких тканинах у літературі використовують два підходи: 1) моделювання руху крові по капілярах з урахуванням точок розгалуження або 2) моделювання м'яких тканин як пористих середовищ і трактування поширення крові як процесу фільтрації. Доцільно моделювати рух крові в м'яких тканинах пористими середовищами, в яких роль пор відіграють капіляри, а поширення крові реалізується як процес фільтрації, описаний рівняннями в частинних похідних. Відомо, що в рівняннях, які описують поширення крові в капілярах, параметри стану та коефіцієнти дифузії залежні від тиску крові. Оскільки капілярів є багато, то моделювати рух крові в кожному капілярі зокрема і на тій основі визначати тиск в певному об'ємі практично неможливо. Одним із підходів розв'язання цього питання є аналіз ділянки, в якій наявні капіляри у вигляді пористого середовища, де виконується закон Дарсі. У дослідженні авторів побудовано математичну модель для визначення розподілу тиску в ділянці з капілярами, яка має форму порожнистого циліндра. Сформульована крайова задача та отримано аналітичний розв'язок.

Значну кількість праць у сфері гемодинаміки присвячено математичному моделюванню руху крові в судинах з урахуванням особливостей самого процесу [5-8]. Моделювання руху крові в капілярах стосується незначна кількість робіт, зокрема була побудована математична модель процесу поширення крові в капілярах у плоскому випадку.

Велика кількість живих організмів мають форму судин, близьку до циліндричної. Тож з деяким наближенням для вивчення гідростатичний градієнт (різниця гідростатичного тиску в капілярі та інтерстаційній рідині у цьому місці). Тиск інтерстиційної рідини ефективності пропонованого підходу вважатимемо, що процес поширення крові відбувається в пористому циліндрі заданої довжин і діаметра. У цьому разі м'які тканини будемо трактуватимемо як пористе середовище, в якому роль пор відіграють капіляри. Тоді процес поширення крові можна описати рівняннями фільтрації.

Метою дослідження є побудова математичної моделі розподілу тиску крові в м'яких тканинах живих організмів, дослідження її адекватності на основі проведення числових експериментів.

Основні результати. Потрібно знайти в порожнистому циліндрі розподіл тиску, який описується звичайним рівнянням параболічного типу за наступних початкових та граничних умов: тиски на внутрішній та зовнішній поверхнях порожнистого циліндра можна вважати сталими, рівним деякому значенню p_{st}; на торцевих поверхнях задано постійні швидкості поступлення крові υ_l та υ_0; початковий розподіл тиску вважається сталим.

Розподіл тиску рідини в пористому середовищі, що має форму порожнистого циліндра висоти l, з внутрішнім радіусом a, зовнішнім - b, можна описати рівнянням [9-11]

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{k}{m\mu}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right). \quad (1)$$

В рівнянні (1) $p=p(z,r,t)$ - тиск в пористому середовищі, m,k - пористість та проникність середовища, μ - динамічна в'язкість речовини, $r\in[a,b]$. На торцевих поверхнях задаються постійні значення швидкості різної величини.

Граничні умови на внутрішній поверхні циліндра – постійна швидкість відтоку крові

$$\upsilon_a=-\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial r}\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial r}=-\upsilon_a\frac{\mu}{k}=const.$$

Граничні умови на зовнішній поверхні циліндра – немає відтоку крові

$$\upsilon_b=-\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial r}\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial r}=-\upsilon_b\frac{\mu}{k}=0.$$

Будемо вважати, що початковий розподіл тиску є сталим, рівним p_{st}. За такого припущення початкова умова, та умова на зовнішній поверхні циліндра будуть нульовими. Для простоти запису замість $(p-p_{st})$ будемо вживати позначення p. Тоді рівняння (1) можна записати

$$\frac{\partial(p-p_{st})}{\partial t}=\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\partial^2(p-p_{st})}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial(p-p_{st})}{\partial r}+\frac{\partial^2(p-p_{st})}{\partial z^2}\right),\quad \kappa=\frac{m\mu}{k}. \tag{2}$$

Розв´язок рівняння будемо знаходити у вигляді

$$p(r,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(r,t)\cos\frac{n\pi z}{l}. \tag{3}$$

Для обчислення коефіцієнтів має місце інтегральне подання для $n>1$.

$$p_n(r,t)=\frac{2}{l}\int_0^l p(r,z,t)\cos\frac{n\pi z}{l}dz. \tag{4}$$

Інтегрування за частинами з врахуванням крайових умов отримуємо наступне співвідношення

$$p_n(r,t)=\frac{2l}{(n\pi)^2}\left[(-1)^n p'_z(r,l,t)-p'_z(r,0,t)\right]-\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 p''_n(r,t).$$

У вихідному рівнянні перейдемо до коефіцієнтів Фур´є. Отримаємо

$$\frac{\partial p_n(r,t)}{\partial t}=\kappa\left(\frac{\partial^2 p_n(r,t)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p_n(r,t)}{\partial r}-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 p_n(r,t)+\right)+\frac{2\kappa}{l}\left[(-1)^n p'_z(r,l,t)-p'_z(r,0,t)\right]. \tag{5}$$

До останнього рівняння (5) застосуємо перетворення Лапласа, де має місце властивість

$$\frac{\partial p_n(r,t)}{\partial t}=sP_n(r,s)-p_n(r,0).$$

В зображеннях Лапласа рівняння (5) має вигляд

$$sP_n(r,s)-p_n(r,0)=\kappa\left[\frac{\partial^2 P_n(r,s)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial P_n(r,s)}{\partial r}-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 P_n(r,s)\right]-\frac{2\kappa}{l}\left[(-1)^n W(r,l,s)+W(r,0,s)\right] \tag{6}$$

Тут $W(r,x,s)$ зображення Лапласа швидкості поширення рідини $\omega(r,x,t)$. Введемо позначення

$$U_n(r,s)=\frac{2\mu}{lk}\left[(-1)^n W(r,l,s)+W(r,0,s)\right]-\frac{1}{\kappa}p_n(r,0),\quad \alpha_n(s)=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2+\frac{s}{\kappa}. \tag{7}$$

Тоді рівняння (6) запишеться наступним чином

$$\frac{\partial^2 P_n(r,s)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial P_n(r,s)}{\partial r}-q^2 P_n(r,s)=U_n(r,s),\quad \alpha_n(s)=q^2 \tag{8}$$

Загальний розв´язок однорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 P_n(r,s)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial P_n(r,s)}{\partial r}-q^2 P_n(r,s)=0 \tag{9}$$

має вигляд

$$P_{on}(r,s)=AI_0(qr)+BK_0(qr). \tag{10}$$

В рівнянні (10) постійні визначаються з крайових умов. Будемо вважати, що $U_n(r,s)$ не залежить від r. Тоді частковий розв´язок буде

$$P_{n,c}(r,s)=-\frac{1}{q^2}U_n(r,s)=-\frac{1}{q^2}U_{cn}(s)$$

Таким чином загальний розв´язок рівняння (8) буде

$$P_n(r,s)=AI_0(qr)+BK_0(qr)-\frac{1}{q^2}U_{cn}(s)$$

За таких умов коефіцієнти рядів Фур´є крайових умов мають вигляд

$$p_n(a,t)=\frac{2\mu l\upsilon_a}{k(n\pi)^2}\left[(-1)^n-1\right],$$

або в зображеннях Лапласа

$$P_n(a,s) = \frac{2\mu l \upsilon_a}{k(n\pi)^2}\left[(-1)^n - 1\right].$$

Далі

$$p_n(b,t) = \frac{2}{n\pi}\int_0^l p'(b,z,t)\sin\frac{n\pi z}{l}dz = 0,$$

звідки

$P_n(b,s) = 0$.

Для визначення невідомих коефіцієнтів отримується наступна система алгебраїчних рівнянь

$$AqI_1(qa) - BqK_1(qa) = -\upsilon_a\frac{\mu}{k},$$
$$AI_0(qb) + BK_0(qb) = \frac{1}{q^2}U_{cn}(b,s).$$

Розв’язками системи є вирази

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\Delta}\left[-\upsilon_a\frac{\mu}{k}K_0(qb) + \frac{1}{q^2}U_{cn}(b,s)qK_1(qa)\right], \\ B &= \frac{1}{\Delta}\left[\frac{1}{q^2}U_{cn}(b,s)qI_1(qa) + \upsilon_a\frac{\mu}{k}I_0(qb)\right], \\ \Delta &= qI_1(qa)K_0(qb) + qI_0(qb)K_1(qa). \end{aligned} \tag{11}$$

Остаточно розв´язок рівняння (8) за прийнятих крайових умов буде мати вигляд в зображеннях Лапласа

$$P_n(r,s) = \frac{1}{\Delta}\left\{\upsilon_a\frac{\mu}{k}G_1(r) + \frac{1}{q}U_{cn}(b,s)G_2(r)\right\} - \frac{1}{q^2}U_{cn}(s), \tag{12}$$

де позначено

$$G_1(r) = I_0(qb)K_0(qr) - I_0(qr)K_0(qb),$$
$$G_2(r) = I_0(qr)K_1(qa) + I_1(qa)K_0(qr).$$

Для остаточного знаходження розв´язку необхідно від зображень в формулі (12) перейти до оригіналу. Якщо за змінну прийняти параметр q, то функція $P_n(r,s)$ має наступні особливі точки. Оскільки

$$\lim_{q\to 0} H = \frac{G_1(r)}{\Delta} = \frac{-\ln\frac{qr}{2} + \ln\frac{qb}{2}}{-q\frac{qa}{2}\ln\frac{qb}{2} + q\frac{qa}{2}\ln\frac{qa}{2}} = \frac{1}{q^2}\frac{2}{a}\frac{\ln\frac{b}{r}}{\ln\frac{a}{b}},$$

то функція $P_n(r,s)$ має полюс другого порядку в точці $q = 0$, лишки в якій:

$$L_0 = \lim_{q\to 0}\frac{d}{dq}\left[q^2\frac{I_0(qb)K_0(qr) - I_0(qr)K_0(qb)}{qI_1(qa)K_0(qb) + qI_0(qb)K_1(qa)}\right] = 0$$

та

$$L_2 = \lim_{q\to 0}\frac{d}{dr}\left[q^2\frac{1}{q^2}\frac{I_0(qr)K_1(qa) + I_1(qa)K_0(qr)}{I_1(qa)K_0(qb) + I_0(qb)K_1(qa)}\right] = 0.$$

Оскільки за припущенням

$$U_n(r,s) = \frac{2\mu}{lk}\left[(-1)^n W(r,l,s) + W(r,0,s)\right] - \frac{1}{\kappa}p_n(r,0)$$

не залежить від радіуса і часу, то оригіналом зображення

$$\frac{1}{q^2}U_{cn}=\frac{U_{cn}}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2+\frac{s}{\kappa}}=\frac{\kappa U_{cn}}{\kappa\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2+s}$$

буде

$$\kappa U_{cn}\exp\left(-\kappa\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right)$$

Функція

$$P_{nc}(r,s)=\upsilon_a\frac{\mu}{k}\frac{G_1(r)}{\Delta}+\frac{1}{q}U_{cn}(b,s)\frac{G_2(r)}{\Delta}=\frac{1}{q\Delta}\left[\upsilon_a\frac{\mu}{k}qG_1(r)+U_{cn}(b,s)G_2(r)\right]$$

має полюси першого порядку в точках $q=-\kappa\beta_n^2$ Якщо ввести позначення $q=\pm i\alpha$, то полюси α_j першого порядку визначаються з рівняння

$$\Delta=\frac{\pi}{2}\alpha_j\left[Y_0(\alpha_j b)J_1(\alpha_j a)-Y_1(\alpha_j a)J_0(\alpha_j b)\right]=0\,. \tag{13}$$

В полюсах тоді

$$G_1(r)=-\frac{\pi}{2}\left[Y_0(\alpha r)J_0(\alpha b)-Y_0(\alpha b)J_0(\alpha r)\right],$$

$$G_2(r)=\frac{\pi}{2}\left[Y_1(\alpha a)J_0(\alpha r)-Y_0(\alpha r)J_1(\alpha a)\right].$$

Оскільки має місце операційна рівність

$$\frac{1}{q}U_{cn}\fallingdotseq\frac{\sqrt{\kappa}U_{cn}}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\kappa\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right),$$

то оригінал $\theta_1(r,t)$ доданку $\frac{G_1(r)}{\Delta}$ буде

$$\theta_1(r,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{G_1(\alpha_n,r)}{Z(\alpha_n)}\exp\left[-\kappa\left(\alpha_n^2+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)t\right],$$

а оригінал $\theta_2(r,t)$ доданку $\frac{G_2(r)}{\Delta}$ -

$$\theta_2(r,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{G_2(\alpha_n,r)}{Z(\alpha_n)}\exp\left[-\kappa\left(\alpha_n^2+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)t\right],$$

де

$$\begin{aligned}Z_n(\alpha)&=Y_0(\alpha b)J_1(\alpha a)-Y_1(\alpha a)J_0(\alpha b)+a\left[J_0(\alpha a)Y_0(\alpha b)-Y_0(\alpha a)J_0(\alpha b)\right]+\\&+\frac{1}{\alpha}\left[J_0(\alpha b)Y_1(\alpha a)-Y_0(\alpha b)J_1(\alpha a)\right]+b\left[Y_1(\alpha a)J_1(\alpha b)-Y_1(\alpha b)J_1(\alpha a)\right]\end{aligned}\,. \tag{14}$$

Використовуючи теорему про згортку оригіналів, отримуємо, що

$$\frac{1}{q}U_{cn}(b,s)\frac{G_2(r)}{\Delta}\fallingdotseq\frac{\sqrt{\kappa}U_{cn}}{\sqrt{\pi}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{G_2(\alpha_j,r)}{Z(\alpha_j)}\exp\left[-\kappa\left(\alpha_j^2+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)t\right]\int_0^t\frac{1}{\sqrt{\tau}}\exp\left[\kappa\alpha_j^2\tau\right]d\tau\,.$$

Таким чином остаточно розв´язок крайової задачі відносно коефіцієнтів для $n>1$ має вигляд

$$p_n(r,t) = \upsilon_a \frac{2\mu}{k\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{G_1(\alpha_j, r)}{Z(\alpha_j)} \exp\left[-\kappa \left(\alpha_j^2 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) t \right] +$$

$$\frac{2\sqrt{\kappa} U_{cn}}{\pi\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{G_2(\alpha_j, r)}{Z(\alpha_j)} \exp\left[-\kappa \left(\alpha_j^2 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) t \right] \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp\left[\kappa \alpha_j^2 \tau \right] d\tau -$$

$$-\kappa U_{cn} \exp\left(-\kappa \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t \right),$$

або

$$p_n(r,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\exp\left[-\kappa \left(\alpha_j^2 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) t \right]}{Z(\alpha_j)} \left\{ \upsilon_a \frac{\mu}{k} G_1(\alpha_j, r) + \frac{\sqrt{\kappa} U_{cn}}{\sqrt{\pi}} G_2(\alpha_j, r) \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp\left[\kappa \alpha_j^2 \tau \right] d\tau \right\} - \quad (15)$$

$$\kappa U_{cn} \exp\left(-\kappa \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t \right)$$

Підставляючи тепер рівність (15) в формулу (3), отримуємо розв΄язок сформульованої задачі.

Знаходження нульового коефіцієнта ряду Фур΄є

$$p_0(r,t) = \frac{2}{l} \int_0^l p(r,z,t) dz . \quad (16)$$

Легко бачити, що остання рівність означає подвійне середнє значення тиску вздовж осі Oz і є сталою величиною. Тому для визначення нульового коефіцієнта ряду Фур΄є отримується рівність

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 p_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_0}{\partial r} \right). \quad (17)$$

За умовою на внутрішній поверхні циліндра заданий деякий сталий потік υ_a, на зовнішній поверхні та в початковий момент часу тиск рівний нулю, то розв΄язок рівняння (17) має вигляд

$$p_0(r,t) = \frac{am\mu\upsilon_a}{k} \ln\frac{b}{r} + \frac{\pi m\mu\upsilon_a}{k} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\kappa\alpha_m^2 t} \frac{J_0^2(b\alpha_m)\left[J_0(r\alpha_m) Y_1(a\alpha_m) - J_1(a\alpha_m) Y_0(r\alpha_m) \right]}{\alpha_m \left[J_1^2(a\alpha_m) - J_0^2(b\alpha_m) \right]},$$

де α_m - додатні корені рівняння (13). За прийнятих крайових умов

$$U_{cn}(r,t) = \frac{2m\mu}{lk} \left[(-1)^n \upsilon_l + \upsilon_0 \right].$$

Таким чином остаточний розв΄язок має вигляд

$$p(r,z,t) = p_{st} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n(r,t) \cos\frac{n\pi z}{l} .$$

Для $n > 1$

$$p_n(r,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\exp\left[-\kappa \left(\alpha_j^2 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) t \right]}{Z(\alpha_j)} \left\{ \upsilon_a \frac{\mu}{k} G_1(\alpha_j, r) + \frac{\sqrt{\kappa} U_{cn}}{\sqrt{\pi}} G_2(\alpha_j, r) \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp\left[\kappa \alpha_j^2 \tau \right] d\tau \right\} -$$

$$\kappa U_{cn} \exp\left(-\kappa \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t \right),$$

та

$$p_0(r,t) = \frac{m\mu a\upsilon_a}{k} \ln\frac{b}{r} + \frac{m\pi\mu\upsilon_a}{k} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\kappa\alpha_m^2 t} \frac{J_0^2(b\alpha_m)\left[J_0(r\alpha_m) Y_1(a\alpha_m) - J_1(a\alpha_m) Y_0(r\alpha_m) \right]}{\alpha_m \left[J_1^2(a\alpha_m) - J_0^2(b\alpha_m) \right]}.$$

Обчислювальний експеримент проводився на основі наступних вхідних даних: v_a = 0,07 см/с=0.0007m/s динамічна в'язкість – 0.0027 *a=3sm=0.03m b==.08 m*

Таблиця 1.

Залежність тиску від радіуса для t = 10 с, k = 1.200·е-12 м^2, μ =1.270·е-3 Па·с.

r (м)	P (Па)	P/133(мм.рт.ст.)
0.03	475,2250	3,5731
0.04	-99,2616	-0,7463
0.05	84,3551	0,6342
0.06	-31,4713	-0,2366
0.07	19,1762	0,1442
0.08	-1,3426	-0,0101

Таблиця 2.

Залежність тиску від часу для r = 0.05 м, k = 1.200·е-12 м^2, μ =1.270·е-3 Па·с.

t (с)	P (Па)	P/133 (мм.рт.ст.)
10	84,3551	0,6342
30	83,9969	0,6316
60	83,4622	0,6275
90	82,9307	0,6235
120	82,4023	0,6196
240	80,3198	0,6039

Таблиця 3.

Залежність тиску від коефіцієнту проникності k для r = 0.05 м, t = 10 с, μ =1.270·е-3 Па·с..

k_p (м^2)	P (Па)
1. 20e-12	84.3551
1. 2000e-11	8.2754
1. 2000e-10	0.6824
1. 2000e-9	0.0253
1. 2000e-8	0.0905

Висновок. З отриманих числових результатів можна зробити наступні висновки.

Результати числового експерименту підтверджують ефективність пропонованого підходу для моделювання розподілу тиску в м'яких тканинах живих організмів.

Аналіз отриманих результатів показує, вони суттєво залежать як від параметрів середовища, так і від параметрів речовини, що фільтрується. Тому для адекватного моделювання процесу фільтрації необхідно на базі розв΄язування обернених коефіцієнтних задач уточнювати параметри моделі.

Іншим критерієм вибору параметрів моделі може бути використання балансових співвідношень розрахованих та реальних величин. З аналізу процесів масопереносу слідує, що в багатьох випадках для отримання балансових співвідношень достатньо використовувати усталені режими фільтрації [8,12].

ЛІТЕРАТУРА

1. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983. 400 с.
2. Левтов В.А., Регирер С.А., Шадрина Н.Х. Реология крови. М.: Медицина, 1982. 272 с.
3. Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. Механика кровообращения. М.: Мир, 1981. 624 с.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
5. Elzbieta Gabrys ,Marek Rybaczuk,,Alicja Kedzia Blood .flow simulation through fractal models of circulatory system// Solitons and Fractals, 27, (2006), 1 –7.
6. Ying He , Hao Liu b ,Ryutaro Himeno a ,Junko Sunaga a ,Nobunori Kakusho a ,Hideo Yokota Finite element analysis of blood .owand heat transfer in an image-based human .// Computers in Biology and Medicine 38,
7. Ying He, ,Hao Liu, ,Ryutaro Himeno/ A one-dimensional thermo-.uid model of blood circulation in the human upper limb // International Journal of Heat and Mass Transfer 47, (2004), 2735 – 2745.
8. Я. П'янило , Г.П'янило,І. Вовчик Вплив параметрів судини на процес усталеного руху крові // Математичні методи в хімії і біології – 2013. Том 1 №2. – С. 94-98.
9. Ya. D. Pyanylo Mathematical modeling of mass transfer in complex engineering and biomedical systems Journal of Mathematical Sciences, Vol. 273, No. 1, June, 2023 p.163-180.
10. П'янило Я.Д. Дослідження неусталеного руху газу в пористих середовищах // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2004. – Вип.2. – С. 178–184.
11. П'янило Я., Притула М. Математичні моделі процесів енергомасопереносу в газовій динаміці. Задачі та аналіз методів їх розв'язування // International workshop on free boundary flows and related problems of analysis. – Ukraine, Kiev, – 2005. – P. 58–59.
12. П'янило Я.Д., Лопатьєв А.О., Готра О.З., Трач В.М., П'янило Г.М. Прямі та обернені задачі моделювання руху речовини в об'єктах складної структури // Теорія та методика фізичного виховання.- 2009.-№7.- с.11-15.

One of the approaches to modeling the process of blood distribution in soft tissues of living organisms

Yaroslav Pyanylo, Anatoly Lopatyev, Hanna Lyantse, Andriy Vlasov, Yuriy Khorkaviy

An approach to building a mathematical model of pressure distribution in soft tissues of living organisms is proposed. Soft tissues are modeled by a porous medium that has the shape of a hollow cylinder of a certain length and radius. The movement of the fluid contained in the porous medium is described by the filtration equation under given boundary conditions. A numerical experiment was conducted, the results of which qualitatively coincide with real processes.

Keywords. Blood diffusion, mathematical modeling, boundary value problems, solution methods.

Отримано: 28.10.2023.