УДК 004.056
doi.org/10.15407/fmmit2023.37.138

Вдосконалена детермінована процедура створення станів Дікке

Андрій Фесенко

к. ф.-м. н., ст. викладач, Навчально-науковий фізико-технічний інститут КПІ ім. Ігоря Сікорського, Берестейський проспект 37, 03056, Київ, e-mail: a.fesenko@kpi.ua

У роботі побудована вдосконалена схема детермінованого створення квантових станів Дікке без використання додаткових кубітів. Незначне послаблення топології лінійного підключення найближчого сусіда дозволило зменшити кількість використовуваних вентилів з $O(kn)$ до $O(n)$ для стану Дікке $\left|D_k^n\right\rangle$.

Ключові слова: синтез квантових схем, стани Дікке

Стани Дікке [1] є відомими в квантовій моделі обчислень вже достатньо давно і є важливим класом квантових станів з великою кількістю застосувань й власною історією практичних реалізацій у фізичних системах.

Станом Дікке (англ. *Dicke*) $\left|D_k^n\right\rangle$, де $n \in N$, $n > 0$, та $k \in N$, $0 \le k \le n$, називають рівномірну суперпозицію всіх n кубітних станів $\left|x\right\rangle$ таких, що вага Хеммінга значення x дорівнює k, тобто $\left|D_k^n\right\rangle = \binom{n}{k}^{-\frac{1}{2}} \sum_{x \in \{0,1\}^m, Ham(x)=k} \left|x\right\rangle$.

Стани Дікке представляють інтерес, оскільки їх заплутаність є максимально стійкою і надійною при часткових втратах частинок. Такі стани є важливою складовою частиною при різних задачах обробки квантової інформації, такими як квантовий обмін між багатьма учасниками та метод квантової метрології при вимірюваннях, а також задачах квантової наближеної оптимізації. Незважаючи на успішне експериментальне створення станів Дікке у фізичних системах, квантово-механічних системах, досить довгий час не існувало ефективних квантових схем для створення довільних станів Дікке.

Так, в деяких випадках використовувалися ймовірнісні методи з використанням перетворення Адамара, метод з постобробкою вимірювань та додатковими регістрами для обчислень, ймовірнісні методи з використанням класичної інформації для керування квантовими перетвореннями та інші. З іншого боку, зважаючи на широке застосування таких станів у різних квантових алгоритмах, створені також наближені методи створення станів Дікке з використанням бієктивних відображень відповідних значень та їхньою апроксимацією у вигляді квантових станів. Стани Дікке є початковим етапом для розв’язку обмеженого випадку задачі Гровера з фіксованою вагою.

Вперше детермінована процедура створення станів Дікке без використання додаткових кубітів з’явилася в 2019 році в роботі [2] з використанням топології лінійного підключення найближчого сусіда (англ. *Linear Nearest Neighbor або LNN*), коли багатокубітні перетворення застосовуються тільки до сусідніх кубітів, оскільки такі обмеження часто виникають у сучасних квантових обчислювальних пристроях.

Далі необхідним є використання певних означень та тверджень роботи [2].

Лема 1. [2] Для довільних значень $n \in N$, $n > 1$, та $k \in N$, $0 < k < n$, виконується тотожність $\left| D_k^n \right\rangle = \sqrt{\frac{k}{n}} \left| D_{k-1}^{n-1} \right\rangle \otimes |1\rangle + \sqrt{\frac{n-k}{n}} \left| D_k^{n-1} \right\rangle \otimes |0\rangle$.

Квантовим перетворенням $SCS_{n,m}$ [2], $n \in N$, $n > 1$, та $m \in N$, $0 \le m < n$, називають таке унітарне перетворення, що для довільного значення $k \in N$, $0 \le k \le m$, $SCS_{n,m} |0\rangle^{\otimes k+1} = |0\rangle^{\otimes k+1}$, $SCS_{n,m} |1\rangle^{\otimes k+1} = |1\rangle^{\otimes k+1}$ і $SCS_{n,m} |0\rangle^{\otimes m-k+1} |1\rangle^{\otimes k} = \sqrt{\frac{k}{n}} |0\rangle^{\otimes m-k+1} |1\rangle^{\otimes k} + \sqrt{\frac{n-k}{n}} |0\rangle^{\otimes m-k} |1\rangle^{\otimes k} |0\rangle$.

В роботі [2] перетворення $SCS_{n,m}$ побудовано за допомогою одного двокубітного вентиля та $k-1$ трикубітних вентилів, використання яких дозволяє реалізувати перетворення $SCS_{n,m}$ для довільного значення k, $0 \le k \le m$.

Однокубітним перетворенням Y-обертанням є перетворення $R_y(2\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Однокубітне перетворення NOT визначають як $NOT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, або матрицю Паулі X. Контрольовані перетворення визначають з введенням одного або декількох керуючих кубітів, як наприклад, вентиль $CNOT$. За допомогою верхнього індексу будемо зазначати номера кубітів, до яких застосовується перетворення, вважаючи, що нумерація кубітів в квантовому регістрі виконується справа наліво, починаючи зі значення 0. Визначимо двокубітне перетворення R_1 таким чином, що $R_1(|xy\rangle) = \begin{cases} |xy\rangle, \text{якщо } x = y \\ \sqrt{\frac{1}{n}}|01\rangle + \sqrt{\frac{n-1}{n}}|10\rangle, \text{якщо } xy = 01 \end{cases}$, де $x, y \in \{0,1\}$. Також визначимо трикубітне перетворення $R_{2,l}$ для всіх значень $l \in N$, $2 \le l \le n$, таким чином, що $R_{2,l}(|xyz\rangle) = \begin{cases} |xyz\rangle, якщо\ xy = 00, xyz = 010, xyz = 111 \\ \sqrt{\frac{l}{n}}|011\rangle + \sqrt{\frac{n-l}{n}}|110\rangle, якщо\ xyz = 011 \end{cases}$, де $x, y, z \in \{0,1\}$.

Результати наступної леми використовуються в роботі [2], але окреме формулювання та отримане повне доведення цього твердження є доповненням до роботи [2].

Лема 2. Для довільних значень $x, y, z \in \{0,1\}$ двокубітне перетворення R_1 можна представити у вигляді $R_1(|xy\rangle) =$
$= CNOT^{1,0}\left(CR_y^{0,1}\left(2\cos^{-1}\sqrt{\frac{1}{n}}\right)\left(CNOT^{1,0}(|xy\rangle)\right)\right)$, а трикубітне перетворення $R_{2,l}$ для довільного значення $l \in N$, $2 \le l \le m$, можна представити у вигляді $R_{2,l}(|xyz\rangle) = CNOT^{2,0}\left(CCR_y^{0,1,2}\left(2\cos^{-1}\sqrt{\frac{l}{n}}\right)\left(CNOT^{2,0}(|xyz\rangle)\right)\right)$.

Лема 3. [2] Для довільних значень $n \in N$, $n > 1$, $m \in N$, $0 \le m < n$, та для довільного значення $k \in N$, $0 \le k \le m$, квантове перетворення $SCS_{n,m}$ представляється як $\left(I^{\otimes(m-1)} \otimes R_1^{1,0}\right)\prod_{i=0}^{m-2}\left(I^{\otimes(m-i-2)} \otimes R_{2,k}^{i+2,i+1,0} \otimes I^{\otimes i}\right)$.

Квантовим перетворенням $UD_{n,m}$, $n \in N$, $n \ge 1$, та $m \in N$, $0 \le m < n$, називають таке унітарне перетворення, що для довільного значення $k \in N$, $0 \le k \le m$, $UD_{n,m}|0\rangle^{\otimes n-k}|1\rangle^{\otimes k} = |D_k^n\rangle$.

Згідно з означенням квантове перетворення $UD_{n,m}$ дозволяє отримати не лише стан Дікке $|D_m^n\rangle$, а й усі стани Дікке $|D_k^n\rangle$ для довільного значення $0 \le k \le m$. Це зумовлено ітеративним підходом до побудови перетворенням $UD_{n,m}$, який використовує властивість, доведену в лемі 1.

Лема 4. [2] Для довільних значень $n \in N$, $n \ge 1$, та $m \in N$, $0 \le m < n$, квантове перетворення $UD_{n,m}$ представляється як

$$UD_{n,m} = \prod_{l=m+1}^{n}\left(I^{\otimes(l-m-1)} \otimes SCS_{l,m}^{n+m-l,n-l} \otimes I^{\otimes(n-l)}\right)\cdot\prod_{l=2}^{m}\left(SCS_{l,l-1}^{n-1,n-l} \otimes I^{\otimes(n-l)}\right).$$

Приклад квантової схеми для отримання стану Дікке $|D_3^5\rangle$ наведено на рис. 1, де $\sqrt{\frac{k}{n}}$ – вентилі відповідають перетворенню $R_y\left(2\cos^{-1}\sqrt{\frac{k}{n}}\right)$.

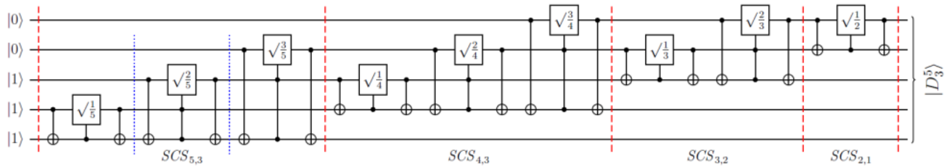

Рис. 1. Квантова схема створення стану Дікке $\left|D_3^5\right\rangle$

Складність такої процедури побудови стану Дікке $\left|D_k^n\right\rangle$, відносно кількості елементарних квантових вентилів оцінюється як $O(kn)$, оскільки необхідно n перетворень SCS, кожне з яких вимагає $3k$ дво- та трикубітних вентилів. При значеннях k близьких до $\frac{n}{2}$ ця складність оцінюється як $O(n^2)$.

Існують також результати щодо створення квантових станів Дікке при використанні можливості використовувати будь-які комбінації кубітів в багатокубітних перетвореннях, наприклад, в роботі [3] 2022 року запропонована детермінована процедура без використання додаткових кубітів з глибиною схеми $O\left(k\log\frac{n}{k}\right)$, але загальні кількість вентилів залишається $O(kn)$, при цьому активно використовуються різні поєднання кубітів в операціях.

Особливості реалізації наявних квантових обчислювальних пристроїв показують, що жорсткі обмеження топології лінійного підключення найближчого сусіда не завжди є обов'язковими, але в більшості випадків довільне поєднання кубітів в операціях може збільшувати рівень помилок обчислень. Тому зараз є цікавими результати, які порушують топологію лінійного підключення найближчого сусіда в незначній мірі. Так, за рахунок таких порушень топології автору вдалося якісно зменшити кількість використовуваних вентилів.

Лема 5. Для довільних значень $n \in N$, $n > 1$, $m \in N$, $0 \le m < n$, та для довільного значення $k \in N$, $0 \le k \le m$, квантове перетворення $SCS_{n,m}$ представляється як

$$NOT^{m} \cdot CNOT^{m,m-k} \cdot CNOT^{m,0} \cdot CR_y^{m,0}\left(2\cos^{-1}\sqrt{\frac{1}{n}}\right) \cdot CNOT^{0,m-k} \cdot NOT^{m}.$$

Доведення. Зафіксуємо деякі значення $n \in N$, $n > 1$, та $m \in N$, $0 \le m < n$. Для довільного значення $k \in N$, $0 \le k \le m$, розглянемо стан $\left|0\right\rangle^{\otimes m-k+1}\left|1\right\rangle^{\otimes k}$ квантового регістру з $m+1$ кубітами. Застосування перетворення NOT^{m} переведе стан системи в значення $|1\rangle\left|0\right\rangle^{\otimes m-k}\left|1\right\rangle^{\otimes k}$. Застосування перетворення $CNOT^{m,m-k}$ переведе стан у значення $|1\rangle|0\rangle^{\otimes m-k-1}|1\rangle^{\otimes k+1}$, а після перетворення $CNOT^{m,0}$ стан буде $|1\rangle|0\rangle^{\otimes m-k-1}|1\rangle^{\otimes k}|0\rangle$. Перетворення $CR_y^{m,0}\left(2\cos^{-1}\sqrt{\frac{1}{n}}\right)$ зробить стан рівним $\sqrt{\frac{k}{n}}|1\rangle|0\rangle^{\otimes m-k-1}|1\rangle^{\otimes k}|1\rangle+$ $+\sqrt{\frac{n-k}{n}}|1\rangle|0\rangle^{\otimes m-k-1}|1\rangle^{\otimes k}|0\rangle$. Після застосування перетворень $CNOT^{0,m-k}$ та NOT^{m} стан системи стане рівним $\sqrt{\frac{k}{n}}|0\rangle^{\otimes m-k+1}|1\rangle^{\otimes k}+\sqrt{\frac{n-k}{n}}|0\rangle^{\otimes m-k}|1\rangle^{\otimes k}|0\rangle$, тобто такі перетворення є еквівалентними перетворенню $SCS_{n,m}$.

*Наслідок***.** Кількість елементарних вентилів, необхідних для реалізації квантового перетворення $SCS_{n,m}$ має оцінку $O(1)$, а значить складність перетворення $UD_{n,m}$ відносно кількості вентилів є точно лінійною, а не квадратичною. При цьому майже всі двокубітні перетворення використовують 0-ий кубіт, що дозволяє оптимізувати топології обчислювального пристрою навіть за порушень топології LNN.

Висновки. Таким чином в роботі побудована покращена схема детермінованого створення квантових станів Дікке $\left|D_k^n\right\rangle$ без використання додаткових кубітів із зменшеною кількістю використовуваних вентилів, яка має оцінку $O(\mathrm{n})$.

Література

[1] *Dicke R.H.* Coherence in Spontaneous Radiation Processes // Physical Review. – т. 93. – № 1. – pp. 99-110. – 1954.

[2] *A. Bartschi, S. Eidenbenz* Deterministic Preparation of Dicke States [Електронний ресурс] // arXiv preprint arXiv: 1904.07358. – 2019. – Режим доступу: http://arxiv.org/abs/1904.07358v1.

[3] *A. Bärtschi, S. Eidenbenz* Short-Depth Circuits for Dicke State Preparation // 2022 IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering, Broomfield, 2022, pp. 87-96.

Improvement of the deterministic preparation of Dicke states

Andrii Fesenko

An improved scheme for the deterministic creation of quantum Dicke states without the use of ancilla qubits is constructed in the paper. A slight weakening of Linear Nearest Neighbor topology made it possible to reduce the number of used gates from $O(kn)$ to $O(n)$ for the Dicke state $\left|D_k^n\right\rangle$.

Отримано 22.03.23