УДК 519.85

doi.org/10.15407/fmmit2023.37.123

Масштабування даних для задачі побудови кривої в натуральній параметризації з кубічною кривиною

Петро Стецюк[1], Ольга Хом'як[2], Володимир Жидков[3]
[1] д. ф.-м. н., Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,
Проспект Академіка Глушкова, 40, 03187, Київ, e-mail: stetsyukp@gmail.com
[2] к. ф.-м.н., Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,
Проспект Академіка Глушкова, 40, 03187, Київ, e-mail: khomiak.olha@gmail.com
[3] аспірант, Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,
Проспект Академіка Глушкова, 40, 03187, Київ, e-mail: lynx233@yahoo.com

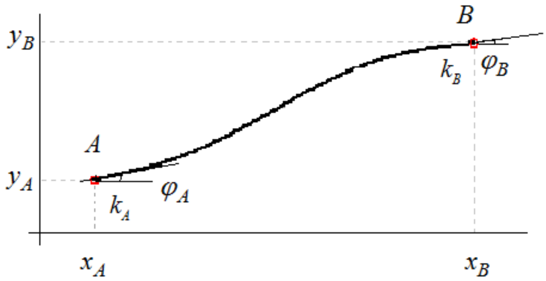
У статті досліджено питання масштабування для системи нелінійних рівнянь у задачі побудови плоскої кривої у натуральній параметризації, яка проходить через дві задані точки та забезпечує в них задані кути нахилу дотичних та задані значення кривин. Представлена оптимізаційна негладка задача еквівалентна системі чотирьох нелінійних рівнянь з чотирма невідомими, яка описує задачу побудови необхідної кривої з кубічним розподілом кривини, та метод її розв'язання на основі модифікації r-алгоритму Шора. Показано, що для того, щоб знайти розв'язок оптимізаційної задачі із заданою точністю за менший час краще розв'язувати задачу з добре масштабованими даними. Правильне масштабування даних відіграє суттєву роль для вибору параметрів при моделюванні фрагментів аеродинамічних та технічних профілів в ітераційному режимі.

Ключові слова: плоска крива, натуральна параметризація, кубічна кривина, негладка функція, *r*-алгоритм.

Вступ. Задачі побудови плоских кривих в натуральній параметризації [1-3] зводяться до задач знаходження розв'язків систем нелінійних рівнянь, де частина рівнянь залежать від невідомих параметрів підінтегральних функцій та невідомої верхньої границі для визначеного інтегралу. Для задачі побудови кривої в натуральній параметризації з кубічною кривиною в роботах [4, 5] сформульована система нелінійних рівнянь, відповідна їй задача негладкої оптимізації та алгоритм її розв'язання. У статті буде досліджено масштабування системи нелінійних рівнянь, щоб забезпечити розв'язання погано обумовленої оптимізаційної задачі, тобто коли відношення мінімального за модулем коефіцієнта кубічного полінома до максимального може становити $10^{-12} - 10^{-9}$.

1. Система нелінійних рівнянь та оптимізаційна задача.

Задача (див. рис. нижче) полягає у наступному. Потрібно так з'єднати точки $A(x_A, y_A)$ та $B(x_B, y_B)$ кривою лінією у натуральній параметризації, де кривина $k(s) = as^3 + bs^2 + cs + d$ має кубічну залежність від довжини дуги, щоб забезпечити в точках A та B задані значення кутів нахилу дотичних φ_A та φ_B, та задані значення кривин k_A, k_B. Кути вимірюються в радіанах.



Нехай S – довжина кривої від точки A до точки B. Знаходженню параметрів кривини a, b, c, d та довжини S відповідає система з чотирьох нелінійних рівнянь та одного лінійного рівняння [4]:

$$x_B = x_A + \int_0^S \cos\left(\varphi_A + \frac{as^4}{4} + \frac{bs^3}{3} + \frac{cs^2}{2} + d \times s\right) ds\,, \tag{1}$$

$$y_B = y_A + \int_0^S \sin\left(\varphi_A + \frac{as^4}{4} + \frac{bs^3}{3} + \frac{cs^2}{2} + d \times s\right) ds\,, \tag{2}$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \frac{aS^4}{4} + \frac{bS^3}{3} + \frac{cS^2}{2} + d \times S\,, \tag{3}$$

$$k_A = d, \quad k_B = aS^3 + bS^2 + cS + d. \tag{4}$$

З лінійного рівняння (4) отримуємо $d^{e} = k_A$. Для пошуку a^{e}, b^{e}, c^{e}, S^{e} в [5] використано умовну задачу мінімізації суми модулів функцій нев'язок для рівнянь (1)–(4), яка має вигляд: знайти

$$\left(a^{e}, b^{e}, c^{e}, S^{e}\right) = \underset{a,b,c,S}{\arg\min} \left\{ \left| x_B - x_A - \int_0^S \cos\left(\varphi_A + \frac{as^4}{4} + \frac{bs^3}{3} + \frac{cs^2}{2} + k_A s\right) ds \right| + \right.$$
$$+ \left| y_B - y_A - \int_0^S \sin\left(\varphi_A + \frac{as^4}{4} + \frac{bs^3}{3} + \frac{cs^2}{2} + k_A s\right) ds \right| + \tag{5}$$
$$\left. + \left| \varphi_B - \varphi_A - \frac{aS^4}{4} - \frac{bS^3}{3} - \frac{cS^2}{2} - k_A S \right| + \left| k_B - aS^3 - bS^2 - cS - k_A \right| \right\}$$

за обмежень

$$S_{\min} \le S \le S_{\max}\,, \tag{6}$$

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi_A + a\frac{i^4 S^4}{4N^4} + b\frac{i^3 S^3}{3N^3} + c\frac{i^2 S^2}{2N^2} + k_A \frac{iS}{N} \le \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, \ldots, N\,, \tag{7}$$

де N – кількість рівних підінтервалів у інтервалі $[0, S]$ для дискретизації функції

$$\varphi(s)=\varphi_A+\frac{as^4}{4}+\frac{bs^3}{3}+\frac{cs^2}{2}+k_As,\ s\in[0,S];\ S_{\min}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2},$$

$S_{\max}$ – параметр для управління верхнею межею на S – загальну довжину кривої.

Цільова функція (5) є кусково-гладкою та забезпечує мінімізацію суми модулів функцій нев'язок для рівнянь (1)–(4). Обмеження (6) гарантують додатні значення довжини S, а обмеження (7) забезпечує існування єдиного глобального мінімуму для задачі (5)–(7) незалежно від вибору величини $S_{\max}$.

Для розв’язання задачі (5)–(7) на основі модифікації *r*-алгоритму Шора розроблено метод з управлінням параметрами α (коефіцієнт розтягу простору), h_0 (крок на першій ітерації) і q_1 (коефіцієнт зменшення кроку на подальших ітераціях) та критеріями зупинки ε_x (зупинка за аргументом) та *maxitn* (максимальна кількість ітерацій). Стартову точку вибрано рівною $(0,0,0,S_{\min})^T$.

2. Масштабування системи (1)–(4) та обчислювальний експеримент.

Нехай довжина кривої $S^{\text{e}}=100$. Щоб у точці (x_B,y_B) гарантувати кут φ_B такий, що $-\frac{\pi}{2}\le\varphi_B\le\frac{\pi}{2}$, потрібно, щоб виконувалася нерівність

$$-\frac{\pi}{2}\le\frac{100^4}{4}a^{\text{e}}+\frac{100^3}{3}b^{\text{e}}+\frac{100^2}{2}c^{\text{e}}+100d^{\text{e}}\le\frac{\pi}{2}.$$

Якщо a^{e}, b^{e}, c^{e}, d^{e} є додатними, то дана нерівність означає, що їх значення будуть величинами різних порядків: так a^{e} буде мати порядок 10^{-8}, b^{e} – порядок 10^{-6}, c^{e} – порядок 10^{-4}, а d^{e} – порядок 10^{-2}. Це впливає на швидкість збіжності методу розв'язання задачі (5)–(7), а при великих значеннях S^{e} навіть на неможливість її розв’язання. У цьому випадку може допомогти лема.

Лема ($\mu>0$ **).** Якщо a^{e}, b^{e}, c^{e}, d^{e}, S^{e} є розв'язком системи (1)–(4), то $a^{\text{ee}}=a^{\text{e}}/\mu^4$, $b^{\text{ee}}=b^{\text{e}}/\mu^3$, $c^{\text{ee}}=c^{\text{e}}/\mu^2$, $S^{\text{ee}}=\mu S^{\text{e}}$ буде розв'язком наступної системи рівнянь:

$$\mu x_B=\mu x_A+\int_0^S\cos\left(\varphi_A+\frac{as^4}{4}+\frac{bs^3}{3}+\frac{cs^2}{2}+d\times s\right)ds, \tag{8}$$

$$\mu y_B=\mu y_A+\int_0^S\sin\left(\varphi_A+\frac{as^4}{4}+\frac{bs^3}{3}+\frac{cs^2}{2}+d\times s\right)ds, \tag{9}$$

$$\varphi_B=\varphi_A+\frac{aS^4}{4}+\frac{bS^3}{3}+\frac{cS^2}{2}+d\times S, \tag{10}$$

$$\mu k_A=d,\quad \mu k_B=aS^3+bS^2+cS+d. \tag{11}$$

Лема встановлює зв'язок розв'язків системи (1)–(4) та масштабованої системи (8)–(11), в якій координати точок та значення кривин домножуються на одну і ту ж величину $\mu > 0$.

Для знаходження розв'язків погано масштабованих ($\mu = 10$) та добре масштабованих ($\mu = 1$) задач проведено обчислювальний експеримент для двох наборів даних. Для погано масштабованих задач були вибрані вихідні дані:

$$x_A = 0,\ y_A = 20,\ \varphi_A = \frac{\pi}{18},\ k_A = 0, x_B = 30,\ y_B = 40,\ \varphi_B = \frac{\pi}{36},\ k_B = 0. \tag{12}$$

$$x_A = 0, y_A = 20, \varphi_A = \frac{\pi}{18}, k_A = 0.1, x_B = 30, y_B = 40, \varphi_B = \frac{\pi}{36},\ k_B = -0.05. \tag{13}$$

Для добре масштабованих задач їм відповідають такі вихідні дані:

$$x_A = 0,\ y_A = 2,\ \varphi_A = \frac{\pi}{18},\ k_A = 0, x_B = 3,\ y_B = 4,\ \varphi_B = \frac{\pi}{36},\ k_B = 0. \tag{14}$$

$$x_A = 0, y_A = 2, \varphi_A = \frac{\pi}{18}, k_A = 0.01, x_B = 3, y_B = 4, \varphi_B = \frac{\pi}{36},\ k_B = -0.005. \tag{15}$$

У табл.1 наведено витрати *r*-алгоритму (за кількістю ітерацій – itn_1 та itn_2, за кількістю обчислень узагальненого градієнта цільової функції – nfg_1 та nfg_2) для знаходження плоских кривих для даних (12) та (13) та краще масштабованих даних (14) та (15) для трьох критеріїв зупинки за аргументом $\varepsilon_x = \{10^{-6}, 10^{-8}, 10^{-10}\}$. При цьому використовувались такі параметри $\alpha = 2.0$, $h_0 = 1.0$, $q_1 = 1.0$, $maxitn = 1500$. В табл. 1 також наведені відносні відхилення між компонентами розв'язків, які визначаються за формулами $\Delta a^{\mathrm{e}} = \left|a_2^{\mathrm{e}} - a_1^{\mathrm{e}} / \mu^4\right| / \left|a_2^{\mathrm{e}}\right|$, $\Delta b^{\mathrm{e}} = \left|b_2^{\mathrm{e}} - b_1^{\mathrm{e}} / \mu^3\right| / \left|b_2^{\mathrm{e}}\right|$, $\Delta c^{\mathrm{e}} = \left|c_2^{\mathrm{e}} - c_1^{\mathrm{e}} / \mu^2\right| / \left|c_2^{\mathrm{e}}\right|$.

Таблиця 1

Витрати *r*-алгоритму на пошук розв'язків задач (12), (14) та (13), (15)

Задача($\mu = 10$)/ Задача($\mu = 1$)	Задачі (12), (14)			Задачі (13), (15)		
	$\varepsilon_x = 10^{-6}$	$\varepsilon_x = 10^{-8}$	$\varepsilon_x = 10^{-10}$	$\varepsilon_x = 10^{-6}$	$\varepsilon_x = 10^{-8}$	$\varepsilon_x = 10^{-10}$
itn_1 / itn_2	163/103	211/133	242/154	254/102	278/131	314/151
nfg_1 / nfg_2	469/132	626/173	696/201	995/146	1039/183	1107/211
Δa^{e}	5.5e-07	3.2e-09	8.9e-12	2.0e-05	1.3e-06	2.0e-09
Δb^{e}	6.5e-07	2.5e-09	3.7e-12	2.8e-06	1.6e-07	2.6e-10
Δc^{e}	6.6e-07	1.8e-09	1.3e-11	4.8e-07	2.4e-08	4.2e-11
ΔS^{e}	1.4e-07	1.3e-10	6.0e-12	2.6e-08	7.5e-10	3.1e-12

З таблиці видно, що для розв'язання задач з добре масштабованими даними (задачі (14) та (15)) потрібно майже в два рази менше ітерацій та майже в чотири рази менше обчислень узагальненого градієнта, ніж для розв'язання задач з погано масштабованими даними (задачі (12) та (13)).

Висновки. У статті досліджено питання масштабування для системи нелінійних рівнянь у задачі побудови плоскої кривої у натуральній параметризації з кубічним розподілом кривини, що проходить через дві задані точки та забезпечує в них задані кути нахилу дотичних та задані значення кривин. Показано, що для того, щоб знайти розв'язок із заданою точністю за менший час краще розв'язувати задачу з добре масштабованими даними. Правильне масштабування даних відіграє суттєву роль для вибору того чи іншого параметру при моделюванні фрагментів аеродинамічних та технічних профілів в ітераційному режимі, враховуючи, що масштаб достатньо встановити всього один раз, а задачу (5)–(7) потрібно вирішувати дуже багато разів.

Робота підтримана Volkswagen Foundation (грант 97 775).

Література

[1] Борисенко В., Агарков О., Палько К., Палько М. Моделювання плоских кривих у натуральній параметризації. Геометричне моделювання та інформаційні технології. 2016. № 1. С. 21-27.

[2] Борисенко В. Д., Устенко С. А., Устенко І. В. Геометричне моделювання s-подібних скелетних ліній профілів лопаток осьових компресорів. Вісник двигунобудування. 2018. № 1. С. 45–52.

[3] Нестеренко А., Дученко О. Квазіньютонівські методи для моделювання плоских кривих. Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. 2021. 33. С. 62-67.

[4] Stetsyuk P.I., Tkachenko O.V., Zhydkov V.O. Using Shor’s r-algorithm for building naturally parametrized curve having cubic curvature. Proceedings of the 7-th International Conference on Control and Optimization with Industrial Application, Baku, Azerbaijan, 26-28 August, 2020. Vol. I. P. 389-391.

[5] Khomiak O., Stetsyuk P., Zhydkov V., Infante L. Using Optimization to Construct Naturally Parametrized Curve with Cubic Curvature. In: Arsenyeva, O., Romanova, T., Sukhonos, M., Tsegelnyk, Y. (eds) Smart Technologies in Urban Engineering. STUE 2022. Lecture Notes in Networks and Systems. 2023. Vol 536. Springer, Cham. P. 14–24.

Coordinate scaling for building naturally parametrized curve with cubic curvature

Petro Stetsyuk, Olha Khomiak, Volodymyr Zhydkov

The article explores topic of coordinate scaling for linear inequality system in problem of building flat naturally parametrized curve passing through 2 points with given inclinations and curvatures at them. The non-smooth optimization problem presented is equivalent to a system of four non-linear equations with four unknowns, which describes the problem of building curve with cubic curvature distribution and its solution method based on Shor’s r-algorithm modification. It is demonstrated, that for finding problem solution with given accuracy for less time it is really better to solve the problem with well scaled coordinates. Correct scaling plays essential role in choosing parameters for iterative modeling fragments of aerodynamic and technical profiles.

Отримано 13.03.23