УДК 519.711.7:519.816
doi.org/10.15407/fmmit2023.37.082

Спільноти у багатошарових мережевих системах

Олександр Поліщук

д.т.н., пров.н.с., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, 79061, м. Львів, e-mail: od_polishchuk@ukr.net

У роботі досліджується проблема пошуку спільнот у багатошарових мережевих системах (БШМС), виявлення яких дозволяє краще зрозуміти процеси міжсистемних взаємодій. Для вирішення цієї проблеми пропонується підхід, що базується на використанні понять потокової агрегат-мережі та потокової серцевини БШМС, які визначаються на підставі потокової моделі міжсистемних взаємодій. На основі запропонованого підходу сформульовані достовірні критерії пошуку спільнот та розроблені ефективні алгоритми їх виявлення у багатошарових мережевих системах. Визначені показники важливості виявлених спільнот у процесі міжсистемних взаємодій. Показано, що пропоновані методи дають змогу виділяти спільноти у випадках, у яких існуючі числові та візуальні підходи виявляються непрацездатними.

Ключові слова: мережева система; міжсистемні взаємодії; потокова модель; агрегат-мережа; потокова серцевина; спільнота

Вступ. Однією з важливих проблем, яка досліджується у теорії складних мереж, є пошук груп взаємопов'язаних вузлів, ідентифікація яких сприяє кращому розумінню принципів організації структури та процесів функціонування мережевих систем (МС). У реальних мережевих системах найбільш поширеними групами є так звані спільноти – підмережі, зв'язки між вузлами яких є чисельнішими та сильнішими, ніж між ними та іншими вузлами мережі [1]. Прикладами спільнот у людському соціумі є громадські організації, політичні партії, релігійні конфесії, національні діаспори, групи в соціальних мережах і т. ін. Чимало спільнот також існує у біологічних та фізичних системах [2]. Натепер основна увага приділяється розробленню методів пошуку спільнот, які базуються на структурних характеристиках складних мереж (СМ) – найменшому розрізі, ієрархічній кластеризації, оцінці модулярності або ентропії, спектральних властивостях мережі тощо [1]. Не менш важливою та складною є задача пошуку спільнот у БШМС, які описують процеси міжсистемних взаємодій у надсистемних утвореннях різних типів [3]. Велика кількість існуючих методів свідчить про неабиякий інтерес до цієї проблематики та її важливість. Основним недоліком цих методів поряд із обчислювальною складністю та ресурсоємністю є відсутність достовірного теоретично обгрунтованого критерію того, що визначена будь-яким із них група вузлів дійсно утворює спільноту. У статті [4] на підставі потокової моделі МС було запропоновано два підходи до пошуку спільнот, які базуються на застосуванні потокових характеристик складових мережі. Перший із цих підходів полягав в обчисленні параметрів впливу окремих підсистем мережевої системи, виділених за принципами впорядкування або підпорядкування, а другий – у використанні поняття її потокової серцевини. На основі запропонованих підходів були сформульовані достовірні критерії пошуку спільнот та розроблені ефективні алгоритми їх виявлення у складних мережевих системах. Мета цієї статті полягає у розробленні на підставі потокової моделі міжсистемних взаємодій критеріїв та методів пошуку спільнот у багатошарових мережевих системах.

1. Структурна та потокова моделі багатошарової мережевої системи

Структурна модель міжсистемних взаємодій описується багатошаровими мережами (БШМ) та відображається у вигляді [5]

$$G^M = \left(\bigcup_{m=1}^{M} G_m, \ \bigcup_{m,k=1}^{M} E_{mk}, m \neq k \right), \qquad (1)$$

де $G_m = (V_m, E_m)$ визначає структуру m-го мережевого шару БШМ; V_m – множина вузлів мережі G_m; E_m – множина зв'язків мережі G_m, E_{mk} – множина зв'язків між вузлами множин V_m та V_k, $m \neq k$, $m,k = \overline{1,M}$, M – кількість шарів (взаємодіючих систем) БШМ. Множину

$$V^M = \bigcup_{m=1}^{M} V_m$$

називатимемо загальною сукупністю вузлів, а множину

$$E^M = \bigcup_{m=1}^{M} E_m \bigcup_{m,k=1,\, m\neq k}^{M} E_{mk}$$

загальною сукупністю ребер багатошарової мережі, N^M, L^M – кількості елементів множин V^M та E^M відповідно. Зі структурного погляду найбільш загальним видом БШМ можна вважати частково покриті (ЧП) багатошарові мережі, перетин множин вузлів окремих шарів яких є непорожнім (рис. 1).

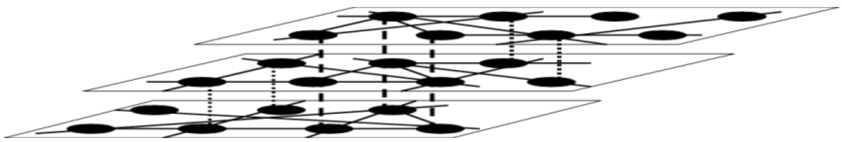


Рис. 1. Приклад структури частково покритої багатошарової мережі

Більшість реально існуючих систем та міжсистемних взаємодій є багатоцільовими та багатофункціональними. Це насамперед виражається у мультипотоковості таких утворень, тобто забезпеченні руху різних типів потоків. У теорії складних мереж структура подібних міжсистемних взаємодій відображається так званими багатовимірними мережами [6]. Структура багатовимірної мережі має вигляд БШМ, у якій кожний шар відображає структуру системи, що забезпечує рух заданого типу потоку. Розглянемо у якості прикладу загальну транспортну систему (ЗТС), яка забезпечує рух двох основних видів потоків – пасажирських та вантажних, тобто її структуру можна зобразити у вигляді двовимірної мережі. Особливістю цієї структури, як і більшості багатовимірних мереж, є неможливість переходу потоку з одного шару на інший (перетворення пасажирів у вантажі і навпаки). Для спрощення подальшого аналізу процесу міжсистемних взаємодій у двовимірній ЗТС її можна поділити на дві чотиришарові монопотокові БШМС, шари якої (залізничний, автомобільний, авіаційний та водний) забезпечує рух лише одного типу потоку – пасажирського або вантажного. Характерною рисою монопотокових (МП) транспортних БШМС є відмінність носіїв потоків у кожному шарі (поїзди, автотранспортні засоби, літаки, кораблі). Загалом під час деталізації структури реальних багатовимірних мереж спочатку доцільно виділяти шари, які забезпечують рух різних типів потоків, а потім кожний із таких монопотокових шарів зображати у вигляді БШМС кожний шар якої забезпечує рух цих потоків специфічним носієм. У цій статті ми розглядаємо випадок, коли міжшарові зв’язки можливі лише між вузлами з однаковими номерами загальної сукупності вузлів БШМС, тобто кожний вузол може входити до складу кількох систем та виконувати в них одну функцію але різними способами. Вузли, у яких можливий перехід потоку з одного шару на інший, називатимемо точками переходу БШМС.

Потокову модель монопотокової багатошарової мережевої системи зобразимо у вигляді потокової матриці суміжності $\mathbf{V}^M(t)$, елементи якої визначаються об’ємами потоків, які пройшли ребрами БШМ (1) за період $[t-T, t]$ до поточного моменту часу $t \geq T$:

$$\mathbf{V}^M(t) = \{V_{ij}^{km}(t)\}_{i,j=1,}^{N} \, {}_{k,m=1}^{M} \quad V_{ij}^{km}(t) = \frac{\tilde{V}_{ij}^{km}(t)}{\max\limits_{s,g=\overline{1,M}} \max\limits_{l,p=\overline{1,N^M}} \{\tilde{V}_{lp}^{sg}(t)\}}, \tag{2}$$

де

$$\tilde{V}_{ij}^{km}(t) = \int\limits_{t-T}^{t} v_{ij}^{km}(\tau)d\tau \, ; \; v_{ij}^{km}(t) = \int\limits_{(n_i^k, n_j^m)} \rho_{ij}^{km}(t,\mathbf{x})dl; \;\; \boldsymbol{\rho}(t,x) = \{\rho_{ij}^{km}(t,\mathbf{x})\}_{i,j=1,}^{N^M} \, {}_{k,m=1}^{M}$$

і $\rho_{ij}^{km}(t,\mathbf{x})$ – щільність потоку, який пересувається ребром (n_i^k, n_j^m) БШМС у поточний момент часу $t > 0$, $\mathbf{x} \in (n_i^k, n_j^m) \subset R^n$, $n = 2, 3, \ldots$, $i, j = \overline{1, N^M}$, $k, m = \overline{1, M}$. Елементи потокової матриці суміжності БШМС визначаються на підставі емпіричних даних про рух потоків її ребрами. Натепер за допомогою сучасних засобів відбору інформації такі дані достатньо легко отримати для багатьох природних та переважної більшості створених людиною систем (транспортних, енергетичних, фінансових, інформаційних тощо) [7]. Матриця $\mathbf{V}^M(t)$ має блочну структуру, у якій діагональні блоки $\mathbf{V}^{mm}(t)$ описують об’єми руху внутрішньо шарових потоків у m-му шарі, а позадіагональні блоки $\mathbf{V}^{km}(t)$ – об’єми руху потоків між m-тим та k-тим шарами БШМС, $m \neq k$, $m,k = \overline{1,M}$. Для виявлення спільнот у кожному шарі БШМС можна скористатися одним із методів, розроблених у [4].

2. Потокові агрегат-мережі та серцевини багатошарових мережевих систем

Визначимо поняття потокової агрегат-мережі БШМС, яка, окрім зменшення розмірності вихідної потокової моделі (2) у M разів, що сприяє подоланню проблеми складності системних досліджень, дозволяє суттєво спрощувати розв'язання багатьох задач дослідження поведінки багатошарових мережевих систем [5]. Оскільки ми розглядаємо випадок, коли міжшарові зв'язки можливі лише між вузлами з однаковими номерами загальної сукупності вузлів БШМС, то структуру потокової агрегат-мережі можна описати у вигляді

$$G_{ag}^{M} = (V^{M}, \bigcup_{m=1}^{M} E_m) .$$

Для довільної МП ЧП БШМ матриця суміжності $\mathbf{F}(t) = \{ f_{ij}(t) \}_{i,j=1}^{N^M}$, елементи якої обчислюються за формулами

$$f_{ij}(t) = \sum_{m=1}^{M} V_{ij}^{mm}(t) / M \ , \ i \neq j \ , \ i, j = \overline{1, N^M} \ ,$$

$$f_{ii}(t) = \sum_{m,k=1,\ m \neq k}^{M} (V_{ii}^{mk}(t) + V_{ii}^{km}(t)) / 2M \ , \ i = \overline{1, N^M} \ , \ t \geq T \ .$$

повністю визначає динамічну в сенсі залежності від часу зважену мережу, яку називатимемо потоковою агрегат-мережею цієї багатошарової системи. Елементи матриці $\mathbf{F}(t)$ визначають інтегральні потокові характеристики ребер та точок переходу багатошарової мережевої системи.

Потокову $\lambda(t)$-серцевину монопотокової БШМС можна визначити двома способами. Перший із них полягає у формуванні матриці суміжності $V_{\lambda}^{M}(t) = \{V_{\lambda,ij}^{mk}(t)\}_{i,j=1\, m,k=1}^{N^N\ M}$ у якій

$$V_{\lambda,ij}^{mk}(t) = \begin{cases} V_{ij}^{mk}(t), \text{ якщо } V_{ij}^{mk}(t) \geq \lambda, \\ 0, \qquad \text{якщо } V_{ij}^{mk}(t) < \lambda, \ i, j = \overline{1, N^M}, m, k = \overline{1, M}, t \geq T, \lambda \in [0,1]. \end{cases} \quad (3)$$

Аналогічно [4] матриця $V_{\lambda}^{M}(t)$ із збільшенням значення $\lambda(t)$ дозволяє будувати ефективні алгоритми виділення спільнот в окремих шарах БШМС.

Другий спосіб побудови потокової серцевини багатошарової системи полягає у визначенні $\lambda^{ag}(t)$-серцевини її потокової агрегат-мережі, яка описується матрицею суміжності $\mathbf{F}^{\lambda}(t) = \{ f_{ij}^{\lambda}(t) \}_{i,j=1}^{N^M}$ у якій

$$f_{ij}^{\lambda}(t) = \begin{cases} f_{ij}(t), \textit{ якщо } f_{ij}(t) \geq \lambda, \\ 0, \qquad \textit{якщо } f_{ij}(t) < \lambda, \ i, j = \overline{1, N^M}, t \geq T, \ \lambda \in [0,1]. \end{cases}$$

Очевидно, що $\lambda(t)$-серцевина монопотокової БШМС входить до складу тієї частини багатошарової системи, на підставі якої побудована $\lambda^{ag}(t)$-серцевина її потокової агрегат-мережі.

3. Виділення спільнот у багатошарових мережевих системах

Очевидно, що одним із найбільш об'єктивних показників сили зв'язку між двома вузлами мережі є об'єми потоків, які проходять через поєднуюче їх ребро протягом певного періоду часу $[t - T, t]$, $t \geq T$. Тому у якості функціонального критерію наявності спільноти у потоковій $\lambda^{ag}(t)$-серцевині можна використати параметр відносної сили взаємозв'язків у ній, який обчислюється за співвідношенням

$$\xi_{\lambda}^{M}(t) = s(\mathbf{F}^{\lambda}(t)) / s(\mathbf{F}(t)),$$

у якому параметр

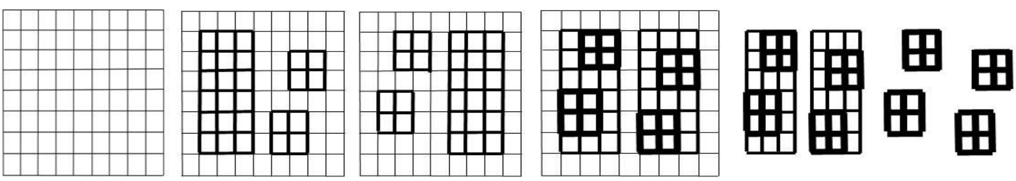
$$s(\mathbf{F}(t)) = \sum_{i,j=1}^{N^M} f_{ij}(t) / L_M$$

визначає усереднений об'єм потоків, які проходять ребром БШМС, а параметр

$$s(\mathbf{F}^{\lambda}(t)) = \sum_{i,j=1}^{N_{\lambda}^{M}} f_{ij}^{\lambda}(t) / L_{\lambda}^{M},$$

де N_{λ}^{M}, L_{λ}^{M} – кількість вузлів та ребер $\lambda^{ag}(t)$-серцевини відповідно, визначає усереднений об'єм потоків ребром $\lambda^{ag}(t)$-серцевини багатошарової системи.

На рис. 2а)–2в) схематично відображені об'єми потоків, які пройшли ребрами 1-го, 2-го та 3-го шарів подібної зображеній на рис.1 тришарової мережевої системи протягом певного періоду часу (товщина ліній пропорційна об'ємам потоків), а рис. 2г) містить зображення потокової агрегат-мережі цієї тришарової системи. Рис. 2д) та 2е) відображають перші два кроки алгоритму виділення спільнот у потоковій $\lambda^{ag}(t)$-серцевині БШМС, який полягає в наступному. Приймаємо значення $\lambda = 0$ та поступово його збільшуємо, поки при певному $\lambda = \lambda_1$ потокова $\lambda^{ag}(t)$-серцевина не поділиться принаймні на дві незв'язні складові (рис. 2д). Таким чином виділено найбільші за своїм розміром спільноти в системі, структури яких очевидним чином визначаються із матриці $\mathbf{F}^{\lambda_1}(t)$, $t \geq T$. Якщо з подальшим зростанням λ при певному $\lambda = \lambda_2$ виділені на попередньому кроці спільноти знову поділяються на незв'язні складові, отримуємо підспільноти цих спільнот (рис. 2е) і т. д. Очевидно, що застосування потокових серцевин агрегат-мережі БШМС дозволяє не тільки ідентифікувати певну її підсистему, як спільноту, а здійснювати глобальний пошук усіх спільнот у мережі. Зазначимо також, що жодний із існуючих чисельних алгоритмів не дає можливості виявити наявність спільноти у зображеній на рис. 2а-2в найпростішій тришаровій регулярній мережі.



а) б) в) г) д) е)

Рис. 2. Застосування потокових λ-серцевин для виділення спільнот у мережі

Аналогічно можна здійснювати пошук спільнот у БШМС, використовуючи визначене формулою (3) поняття її $\lambda(t)$-серцевини. Перевагою наведеного вище алгоритму є можливість виявленням спільнот, які існують у різних шарах багатошарової системи та у поєднанні взаємно посилюють одна одну, утворюючи багатошарову групу вузлів, зв'язки між якими є значно сильнішими, ніж у середньому по БШМС.

Висновки. У статті на підставі потокової моделі міжсистемних взаємодій введено поняття агрегат-мережі багатошарової мережевої системи. Визначено достовірний кількісний критерій того, що певна група взаємопов'язаних вузлів агрегат-мережі утворює спільноту. Цей критерій базується на тому, що об'єми потоків, які рухаються між вузлами спільноти, є суттєво більшими, ніж у середньому по агрегат-мережі БШМС. На підставі поняття потокової серцевини агрегат-мережі побудовано ефективний алгоритм виділення спільнот у багатошаровій системі. Показана надійність роботи цього алгоритму навіть у випадках, коли складові таких спільнот в окремих шарах БШМС виявляються слабо.

Література

[1] *Labatu V., Balasque J. M.* Detection and Interpretation of Communities in Complex Networks: Practical Methods and Application // Computational Social Networks (Eds. by Abraham A., Hassanien A. E.). – Springer, London, 2012.

[2] *Javed M. A. et al.* Community detection in networks: A multidisciplinary review // Journal of Network and Computer Applications. – 2018. – Vol. 108, P. 87-111.

[3] *Huang, X. et al.* A survey of community detection methods in multilayer networks // Data Mining and Knowledge Discovery.– 2021.– Vol. 35.– P. 1–45.

[4] *Поліщук О.Д.* Потокові підходи до виділення спільнот у складних мережевих системах // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології.– 2021.– Вип. 33.– С. 122-127.

[5] *Polishchuk O.* Flow Model of Intersystem Interactions and Influence of Components of Multilayer Network Systems // ArXiv: 2302.02134 [physics.soc-ph] .– 4 Feb 2023.

[6] *Berlingerio M. et al.* Multidimensional networks: foundations of structural analysis // World Wide Web.– 2013.– no. 16.– P. 567–593.

[7] *Barabasi A.-L.* The architecture of complexity // IEEE Control Systems Magazine.– 2007.– Vol. 27.– no. 4.– P. 33-42.

Communities in multilayer network systems

Olexandr Polishchuk

The paper investigates the problem of finding communities in multilayer network systems (MLNS), the detection of which allows for a better understanding the processes of intersystem interactions. To solve this problem, an approach based on the use of concepts of a flow aggregate-network and a flow core of MLNS, which are defined on the basis of a flow model of intersystem interactions, is proposed. Based on the proposed approach, reliable criteria for community search are formulated and effective algorithms for their detection in multilayer network systems are developed. Indicators of the importance of identified communities in the process of intersystem interactions are determined. It is shown that the proposed methods allow us to distinguish communities in cases where existing numerical and visual approaches are ineffective.

Отримано 03.03.23