УДК 519.1

doi.org/10.15407/fmmit2023.37.072

Про алгоритм побудови 2-зв’язних мінорів поверхні Клейна

Володимир Петренюк[1], Дмитро Петренюк[2]

[1] к. фіз.-мат. н., доцент, Центральноукраїнський нац. техн. ун.-т, 25006, Україна, Кропивницький, пр-т. Університетський, 8, , e-mail: petrenjukvi@i.ua
[2] к. фіз.-мат. н., ІК ім. Глушкова В.М. НАН України, 03187, Україна, Київ, пр-т акад. Глушкова, 40, e-mail: guitar_player@ukr.net

У роботі розглянута задача побудови діаграм 2-зв’язних мінорів поверхні Клейна, тобто графів неорієнтованого роду 3 – мінімальних відносно роду при операціях стисканні чи видаленні довільного його ребра. Основний результат – лінійний алгоритм, який коректно вирішує цю задачу.

Ключові слова: граф-обструкція, поверхня Клейна, мінор, 2-зв’зність.

Вступ. Основні визначення та позначення узяті з [1, 2, 3]. Під точкою графа розумітимемо або його вершину, або внутрішню точку його ребра. Розглянемо задачу побудови всіх 2-зв’язних графів-обструкцій для N_2 – поверхні Клейна із множинами ребер, кожне з яких є суттєвим відносно неорієнтованого роду 3 при операціях видалення ребра чи стискання його в точку, тобто мінорів неорієнтованого роду 3. В [4] наведено числом 668, як потужність множини всіх неізоморфних 2-зв’язних мінорів неорієнтованого роду 3, але немає їхніх діаграм. Використаємо для побудови діаграм 2-зв’язних мінорів неорієнтованого роду 3 структурні властивості таких графів, виписані в [5, 8]. Список всіх неізоморфних мінорів неорієнтованого роду 2 містить 35 графів. В [6] наведено 12 базисних графів проективної площини, утворених перетвореннями методу релятивних компонент, та наведено множину з 63-х базисних графів для поверхні Клейна. Подібна задача побудови графів-обструкцій неорієнтованого роду на основі множини відомих графів-обструкцій для неорієнтованого роду k, має розв’язок для не більш ніж на 10 вершинах [7], а саме, повної множини для проективної площини та неповної для інших поверхонь, зокрема, поверхні Клейна.. Використаємо метод φ-перетворень графів та теорему 2 [8].

Твердження 1. Нехай G_i - мінор неорієнтованого роду 2, а граф G поданий як φ-образ $\varphi(G_i \setminus e + St_n(H), \sum_{j=1}^{2}(a_{j1} \underset{\bullet}{+} g_{j1})) \to (G, \{a_j^*\}_{i=1}^{2})$, де $i = 1(1)35$, $G_i \setminus e$ є G_i - мінор із видаленим ребром e та заданими точками з множини M_i, $M_i = \{a_{j1}, a_{j2}\}$, досяжною на поверхні Клейна. Задано $St_n(H)$ - квазізірку з центром графом H

та множиною висячих ребер як сумою підмножин $\{(a_i, g_{j1})\}_{i=1}^{m}$ та $\{(b_k, g_{j2})\}_{k=m+1}^{n}$, де $n > m \geq 1$, які висячими вершинами a_i, b_k приклеєно довільним чином до двох точок з множини X, $X = \{g_{j1}, g_{j2}\}$, причому множина точок Y, $Y = \{a_i, b_k\}_{i+k=1}^{n}$, на евклідовій площині має число досяжності $t_H(Y, S_0)$, де $t_H(Y, S_0) = 2$, а множина X на поверхні Клейна має число досяжності $t_{St_n(H)}(X, N_2)$, де $t_{St_n(H)}(X, N_2) = 1$.

Якщо граф H гомеоморфний одному з графів $\{K_4, K_{2,3}, K_5 \setminus e\}$ та має задану множину точок $X \cup Y$, **де** $X \cap Y = \varnothing$, досяжну на проективній площини, та з числом досяжності $t_G(X \cup Y, S_0)$ відносно евклідової площини S_0, де $t_G(X \cup Y, S_0) = 2$, то граф G - мінор чи граф-обструкція неорієнтованого роду 3.

Доведення. Граф G, $G = D_{17}$, можливо подати як призму, в основах якої лежать два підграфи ізоморфних K_4, вершини яких попарно з'єднані ребрами. Множину G^1 ребер графа G розіб'ємо на класи еквівалентності відносно групи автоморфізмів цього графа, тобто підмножини ребер графів обох основ та множина з чотирьох ребер граней. Для кожного представника класу еквівалентності проведемо стискання в точку. Результат наведено на рис.1. для ребер класу з представником (4.6), на другій карті для (7,8). Згідно цих карт кожна пара вершин цих стиснутих графів лежить або на границі 2-клітки чи псевдоклітки, тобто є досяжною на проективній площині. Тому можливо приклеїти до червоних пар квазізірки, з числа наведених на рис.2, ототожнивши з парою неінцидентних вершин графа G. Варіанти склеєних φ-образів графів наведені на рис.3.

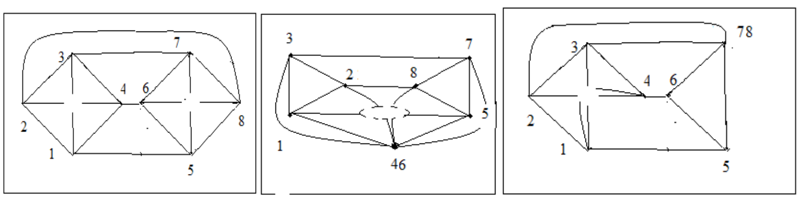


Рис.1. Вкладення D_{17} в N_2 на 1-й карті, на 2-й та на 3-й графи $G_{(4,6)}$, $G_{(7,8)}$ вкладені в N_1.

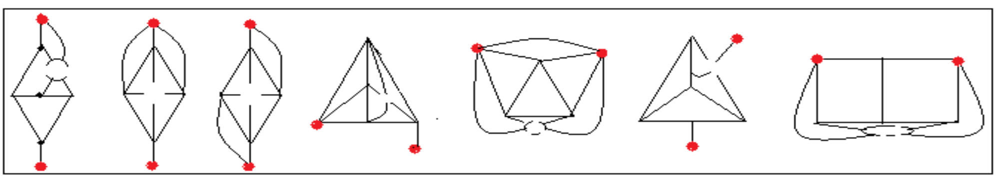
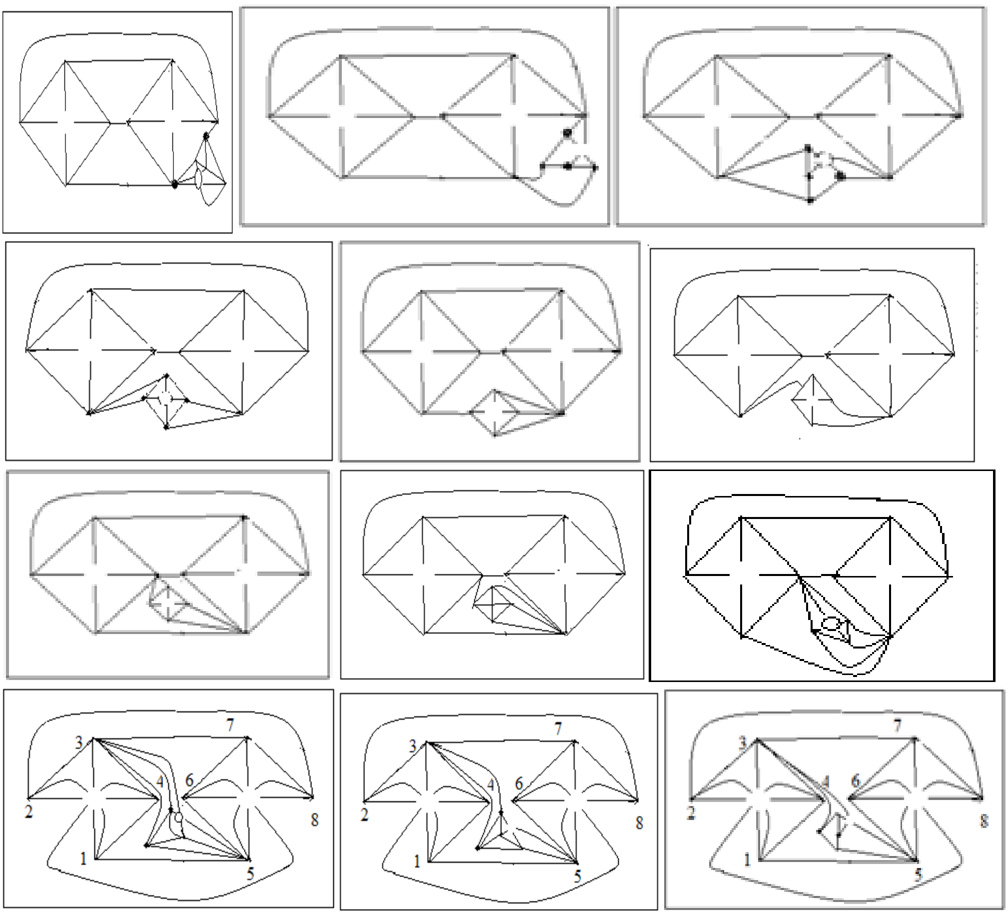


Рис.2. Квазізірки $St_n(H)$ зі склеєними в пару точок підмножинами висячих вершин.

Для побудови 2-зв’язних мінорів для N_2 використаємо множину всіх неізоморфних мінорів проективної площини. Нехай $G := D_{17}$. Перебираємо всі різні варіанти склейки по множині з двох точок графа G та пари точок квазізірки із центром H, можливим є ототодження кількох висячих вершинами в одну чи другу точку пари склейки. Можливими будуть наступні варіанти φ-образу зображені на рис 2, де виділено пару склеєних висячих вершин, які приклеюватимемо до пари вершин графа D_{17}. Відмітимо, що деякі висячі ребра квазізірки $St_n(H)$ стягнуті в точку як несуттєві відносно неорієнтованої поверхні N_2. Виберемо точки склейки робимо серед тих пар вершин, які є елементами досяжної множини на N_2. Видалимо одне з ребер (a,b) та приклеїмо попарно до кінцевих вершин видаленого ребра ті вершини квазізірки із центром H та множиною висячих вершин, розбитою на дві підмножини, що утворились при ототожненні цих двох підмножин. Можливими є випадки склейок зображені на рис.2. Доведення твердження 1 закінчене.



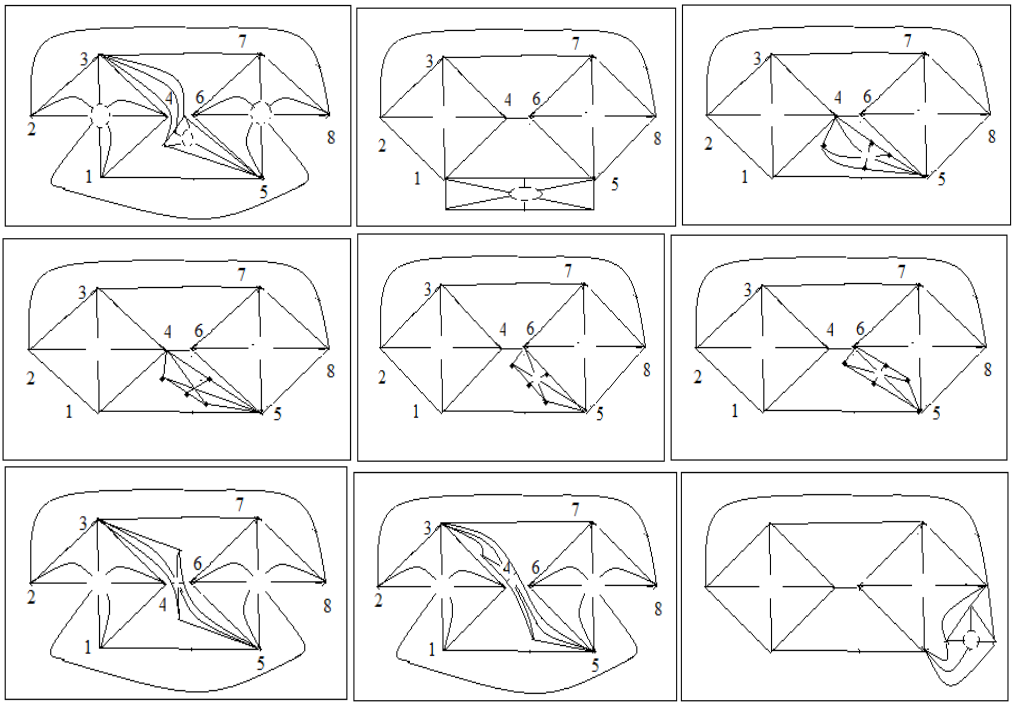


Рис. 3. Діаграми 2-зв’язних мінорів для поверхні Клейна..

Твердження 2. Приблизне число 2-зв’язних мінорів поверхні Клейна - 700. Доведення. Кількість зв’язних мінорів для проективної площини дорівнює 32. Для вибраного наосліп серед цих графів мінору D_{17} маємо множину з 21-го графа, наведену на рис. 3. Вважатимемо, що для кожного з графів-мінорів проективної площини кількість мінорів приблизно однакова . Отже матимемо число 2-зв’язних мінорів поверхні Клейна приблизно 700. Схематичне доведення закінчене. Твердження 1 є основою лінійного алгоритму 1 яким можливо побудовати всі 2-зв’язні мінори поверхні Клейна.

Алгоритм 1. Вхід: Множина $\{G_i\}_{i=1}^{35}$ із 35-ти мінорів проективної площини, множина всіх неізоморфних вкладень цих графів в поверхню Клейна, $\{St_{n_j}(H_j)\}_{j=1}^{7}$ множина квазізірок для склеювання по двом парам виділених вершин. Вихід: Множина 2-звязних графів-обструкцій $\{\varphi(G_k)\}_{k=1}^{R}$ неорієнтованого роду 3.

Для циклу з параметром і від 1 до 35 виконати наступні дії:

1. $G := G_i$;

2. Побудуємо множину $B = \{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{|B|}$ всіх пар вершин графа G, які розташовані на границі 2-клітки поверхні клейна чи її

псевдоклітки та зберігають досяжність в графах, отриманих шляхом видалення довільного ребра чи стискання ребра в точку.

3. Для циклу з параметром k від 1 до |B| виконати наступні дії:
4. $(a,b) := \{a_k, b_k\}$;
5. Для циклу з параметром j від 1 до 7 виконати наступні дії:
   a. $St_n(H) := St_{n\,j}(H_j)$;
   b. Склеїмо попарно $(G, (a,b))$ та $(St_n(H), (a', b'))$;
   c. Отримаємо пару $\varphi(G)$, $(a*, b*)$;
   d. Виводимо $\varphi(G)$;
   e. Кінець циклу по j.
6. Кінець циклу по k
7. Кінець циклу по i.
8. Кінець алгоритму 1

Висновки. Таким чином в роботі наведена побудова лінійного побудови діаграм 2-зв'язних мінорів поверхні Клейна.

Література

[1] *Хоменко М. П.* Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ АНУ. Киев.. – 1973. -383 с.
[2] *Хоменко М. П.* φ-перетворення графів. Препринт ИМ АНУ. Киев. 1970. -299 с.
[3] *Mohar B.,Thomassen C.* Graphs on Surfaces. Johns Hopkins University Press, 2001. – 412 p.
[4] *P.Skoda*. Obstructions for embedding graphs into surfaces, Simon Frazer University, PhD dissertation, 2012.-133 p.
[5] *Петренюк В.І.* Про структуру площинних підграфів графів-обструкцій неорієнтованої поверхні заданого роду. *Фізико математичне моделювання та інформаційні* технології. 2021, № 33. с. 105–109.
[6] Anna Flototto. Embeddability of graphs into the Klein surface. Dissertation, University Bielefeld, 2010, -174 pp.
[7] *Hur S.* The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. Phd, Ohio State University, 2008. http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=osu1209141894.
[8] Петренюк В.І., Петренюк Д.А., Оришака О.В. Структура проективно площинних підграфів графів - обструкцій заданої поверхні. Кібернетика та комп'ютерні технології, №2, Інститут кібернетики НАНУ, Київ,2022, с.13-30. http://cctech.org.ua/images/docs/Articles/2022/paper_22_2_2.pdf

On the algorithm for constructing 2-connected minors of the Klein surface

Volodymyr Petrenjuk, Dmytro Petrenjuk

The paper considers the problem of constructing diagrams of 2-connected minors of the Klein surface, that is, the simple graphs of nonorientable genus 3 that are minimal with respect to the genus during compression or removal of an arbitrary edge of it. The main result is a linear algorithm. which correctly solves this problem.

Отримано 28.03.23