УДК 519.64, 519.65

doi.org/10.15407/fmmit2023.36.111

Ефективні за точністю алгоритми апроксимації функцій із класу Ліпшиця рядами Фур'є

Олена Коломис[1], Лілія Луц[2]

[1] к. фіз.-мат. н., Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,
пр. Академіка Глушкова, 40, 03187, Київ, e-mail: kolomys@ukr.net
[2] к. фіз.-мат. н., Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,
пр. Академіка Глушкова, 40, 03187, Київ, e-mail: lv1@ukr.net

Побудовано ефективний за точністю алгоритм апроксимації функцій з класу Ліпшиця за допомогою рядів Фур'є. Отримано похибку апроксимації функції, яка складається з двох частин: похибки, яка виникає внаслідок використання скінченної кількості членів ряду, і похибки внаслідок наближеного визначення коефіцієнтів ряду Фур'є з використанням оптимальних за порядком точності на класі Ліпшиця квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилювальних функцій.

Ключові слова: апроксимація функцій; клас Ліпшиця; ряди Фур'є; коефіцієнти ряду Фур'є; похибка апроксимації

Вступ. Для дослідження складних сучасних систем необхідно опрацьовувати та аналізувати великі обсяги інформації. В алгоритмах обробки експериментальних даних, які є переважно дискретним поданням функціональних залежностей, що характеризують систему, виникає потреба подання в зрозумілій та стислій формі емпіричних залежностей (зокрема, в аналітичному вигляді) між параметрами, що описують її поведінку. Отже, виникає потреба розв'язувати задачу апроксимації сітково заданих функцій, які належать деякому класу функцій F [1 – 6].

1. Апроксимація функцій рядами Фур'є

Одним із відомих способів розв'язання цієї задачі є апроксимація функцій рядами Фур'є [1, 2, 5, 6] вигляду

$$f(x) \sim S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right), \tag{1}$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx \,, \; b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \,. \tag{2}$$

Похибка апроксимації визначається співвідношенням

$$E = \| f(x) - S(x) \|_1 = \max_{\substack{f(x) \in F \\ x \in [-l,\, l]}} | f(x) - S(x) | \le \varepsilon \,. \tag{3}$$

Нехай $f(x) \in F$ на відрізку $[-l, l]$ задана N своїми значеннями $\{f_i\}_0^{N-1}$ у деякому наборі вузлових точок $\{x_i\}_0^{N-1}$ із її області визначення. Нехай V_{a_k} і V_{b_k} –

похибки наближеного обчислення $\tilde{a}_k$ і $\tilde{b}_k$ за допомогою оптимальних за точністю або близьких до них квадратурних формул (к. ф.) [3, 4, 7].

На практиці функцію $f(x)$ апроксимують скінченними сумами Фур'є вигляду

$$S_n(x, f) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{a}_k \cos\frac{k\pi x}{l} + \tilde{b}_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{4}$$

де $\tilde{a}_k$, $\tilde{b}_k$, $k = \overline{0, N-1}$ – наближені значення коефіцієнтів ряду Фур'є.

У цьому випадку похибка апроксимації складається з двох частин: похибки, яка виникає внаслідок використання скінченної кількості членів ряду, і похибки внаслідок наближеного обчислення коефіцієнтів. Оцінимо її так [6]:

$$E = E(F, N, n) = \| f(x) - S_n(x, f) \|_1 = \max_{\substack{f(x)\in F\\ x\in[-l,\, l]}} | f(x) - S_n(x, f) | \le |R_n(f)| + V_{a_0}/2 + \sum_{k=1}^{n}\left(V_{a_k} + V_{b_k}\right), \tag{5}$$

де $V_{a_k} = V_{a_k}(F, N) = \max\limits_{\substack{f(x)\in F\\ x\in[-l,\, l]}} |a_k - \tilde{a}_k|$, $V_{b_k} = V_{b_k}(F, N) = \max\limits_{\substack{f(x)\in F\\ x\in[-l,\, l]}} |b_k - \tilde{b}_k|$ – похибки наближеного обчислення коефіцієнтів a_k, b_k, $k = \overline{0, N-1}$, $R_n(f)$ – лишок ряду Фур'є при переході від нескінченної суми (1) до скінченної суми (4).

2. Апроксимація функцій із класу Ліпшиця

Розглянемо клас функцій C_L – клас функцій $f(x)$, які визначені на $[-l, l]$ і задовольняють умову $|f(x') - f(x'')| \le L|x' - x''|$, $x', x'' \in [-l, l]$. Відомо [1], що у класі функцій C_L ряд Фур'є збіжний, оскільки виконуються відомі ознаки збіжності (Ліпшиця, Дирихле), тому можна стверджувати, що періодичну з періодом $2l$ функцію $f(x) \in C_L$ можна представити рядом Фур'є (1) – (2).

Справедлива наступна теорема.

Теорема. Нехай періодична з періодом $2l$ функція $f(x) \in C_L$, $x \in [-l, l]$, апроксимується рядом Фур'є вигляду (4), де коефіцієнти $\tilde{a}_k$ і $\tilde{b}_k$ визначаються за допомогою оптимальних за порядком точності при $N \ge n\pi/l$ к. ф. вигляду

$$R_{1,a}(k) = \sum_{\nu=0}^{N-1} f_\nu \int_{x_\nu - 1/2}^{x_\nu + 1/2} \cos\frac{k\pi}{l} x\,dx, \quad R_{1,b}(k) = \sum_{\nu=0}^{N-1} f_\nu \int_{x_\nu - 1/2}^{x_\nu + 1/2} \sin\frac{k\pi}{l} x\,dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

де $f_\nu = f(x_\nu)$, $x_\nu = \nu \cdot \Delta x_\nu$, $\Delta x_\nu = x_{\nu+1} - x_\nu$, $x_{\nu-1/2} = x_\nu - \Delta x_\nu/2$, $x_{\nu+1/2} = x_\nu + \Delta x_{\nu+1}/2$, $\nu = \overline{0, N-1}$, $\Delta x_{-1} = 0$, $x_0 = -l$, $x_{N-1+1/2} = x_N = l$.

Тоді похибка апроксимації функції

$$E_{C_L} < \frac{4Ll}{\pi}\left(\frac{\ln n}{n} + \frac{2 + \ln \pi}{n}\right) + \frac{L}{l}\left\{\sum_{\nu=0}^{N-2}\left[\frac{\Delta^2 x_\nu}{8} + 4\frac{l^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\sin^2\frac{k\pi\Delta x_\nu}{4l} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times\left(\left|\cos\frac{k\pi x_{\nu+1/2}}{l}\right| + \left|\sin\frac{k\pi x_{\nu+1/2}}{l}\right|\right)\right] + \frac{\Delta^2 x_{N-1}}{4} + \sum_{k=1}^{n}\left(P_{a,1}(k) + P_{b,1}(k)\right)\right\}, \tag{7}$$

де $P_{a,1}(k)=\frac{l}{\pi k}\left|\Delta x_{N-1}\sin k\pi-\frac{2l}{k\pi}\sin\left(k\pi-\frac{k\pi\Delta x_{N-1}}{2l}\right)\sin\frac{k\pi\Delta x_{N-1}}{2l}\right|$, $P_{b,1}(k)=\frac{1}{k\pi}\left|\Delta x_{N-1}\cos k\pi-\right.$ $\left.-\frac{2l}{k\pi}\cos\left(k\pi-\frac{k\pi\Delta x_{N-1}}{2l}\right)\sin\frac{k\pi\Delta x_{N-1}}{2l}\right|$, $\Delta x_\nu=x_{\nu+1}-x_\nu$.

Доведення. 1. Оскільки $f(x)\in C_L$ – періодична з періодом $2l$, то її похідну $f'(x)$ також можна розкласти в ряд Фур'є [1]. Позначимо коефіцієнти розкладу $f'(x)$ через a'_k, b'_k та знайдемо їх:

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx=\frac{1}{k\pi}\int_{-l}^{l}f(x)d\sin\frac{k\pi x}{l}=\frac{f(x)}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{l}\bigg|_{-l}^{l}-$$

$-\frac{1}{k\pi}\int_{-l}^{l}f'(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx=-\frac{1}{k\pi}\int_{-l}^{l}f'(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx=-\frac{l}{k\pi}b'_k$, звідки маємо $a_k=-\frac{l}{k\pi}b'_k$, $k=1,2,3,\ldots$. Аналогічно $b_k=-\frac{l}{k\pi}a'_k$, $k=1,2,3,\ldots$. Тоді

$$R_n(f)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{l}{k\pi}\left(a'_k\sin\frac{k\pi x}{l}-b'_k\cos\frac{k\pi x}{l}\right).\quad(8)$$

У (8) з правого боку у дужках стоїть k-й член ряду, спряженого з рядом Фур'є похідної $f'(x)$. Введемо часткову суму $\tilde{\sigma}_k=\tilde{\sigma}_k(x)=\sum_{m=k+1}^{\infty}\left(a'_m\sin\frac{m\pi x}{l}-b'_m\cos\frac{m\pi x}{l}\right)$ цього ряду і зробимо у (8) заміну $\left(a'_k\sin\frac{k\pi x}{l}-b'_k\cos\frac{k\pi x}{l}\right)=\tilde{\sigma}_{k-1}-\tilde{\sigma}_k$:

$$R_n(f)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{l}{k\pi}\left(\tilde{\sigma}_{k-1}-\tilde{\sigma}_k\right).\quad(9)$$

Оцінимо величину $\tilde{\sigma}_k$. У [1, розд. 19, § 2] доведено співвідношення $\tilde{\sigma}_k(x)=$ $=-\frac{1}{l}\int_0^l[f'(x+t)-f'(x-t)]\frac{\cos\frac{\pi t}{2l}-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}dt$. Для $f(x)\in C_L$ $|f'(x)|\le L$. Маємо

$$|\tilde{\sigma}_k(x)|\le\frac{2L}{l}\int_0^l\frac{\left|\cos\frac{\pi t}{2l}-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\right|}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}dt=\frac{4L}{l}\int_0^l\frac{\left|\sin\frac{k}{2}\frac{\pi t}{l}\cdot\sin\frac{k+1}{2}\frac{\pi t}{l}\right|}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}dt\le\frac{4L}{l}\int_0^l\frac{\left|\sin\frac{k+1}{2}\frac{\pi t}{l}\right|}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}dt\le\frac{2L\pi}{l}\times$$

$$\times\int_0^l\frac{\left|\sin\frac{k+1}{2}\frac{\pi t}{l}\right|}{\frac{\pi t}{l}}dt=2L\int_0^{(k+1)\pi/2}\frac{|\sin u|}{u}du<2L\int_0^1 du+2L\int_1^{(k+1)\pi/2}\frac{du}{u}=2L\left(1+\ln\frac{(k+1)\pi}{2}\right)\le 2L(\ln n+\ln\pi+1)\cdot$$

Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|\tilde{\sigma}_k|}{k}<\lim\limits_{k\to\infty}\frac{2L(\ln k+\ln\pi+1)}{k}=2L\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\ln k}{k}=0$, перегрупувавши члени у (9), отримаємо ряд $R_n(f)=\frac{l\tilde{\sigma}_n}{\pi(n+1)}-\frac{l}{\pi}\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\tilde{\sigma}_k$.

Тоді $|R_n(f)|<\frac{2Ll}{\pi}\left[\frac{\ln n+\ln\pi+1}{n+1}+\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)(\ln k+\ln\pi+1)\right]$.

У [1, розд. 19, § 2] доведено, що $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\ln k<\frac{\ln n+2}{n}$. Отже, маємо

$$|R_n(f)|<\frac{2Ll}{\pi}\left[\frac{\ln n+\ln\pi+1}{n}+\frac{\ln n+2}{n}+\frac{\ln\pi+1}{n}\right]=\frac{4Ll}{\pi}\left(\frac{\ln n}{n}+\frac{2+\ln\pi}{n}\right). \qquad (10)$$

Оцінку лишку доведено.

2. Розглянемо V_{a_k}, V_{b_k}, $k=1,2,3,\ldots$:

$$V_{a_k}=\left|\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx-\frac{1}{l}\sum_{\nu=0}^{N-1}f_\nu\int_{x_{\nu-1/2}}^{x_{\nu+1/2}}\cos\frac{k\pi x}{l}dx\right|\le\frac{1}{l}\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{x_{\nu-1/2}}^{x_{\nu+1/2}}\left|f(x)-f_\nu\right|\left|\cos\frac{k\pi}{l}x\right|dx\le$$

$$\le\frac{L}{l}\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{x_{\nu-1/2}}^{x_{\nu+1/2}}|x-x_\nu|\left|\cos\frac{k\pi x}{l}\right|dx=\frac{L}{l}\sum_{\nu=0}^{N-2}\left[\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1/2}}(x-x_\nu)sign\left(\cos\frac{k\pi x}{l}\right)\cos\frac{k\pi x}{l}dx-\right.$$

$$\left.-\int_{x_{\nu+1/2}}^{x_{\nu+1}}(x-x_{\nu+1})sign\left(\cos\frac{k\pi x}{l}\right)\cos\frac{k\pi x}{l}dx\right]+\frac{L}{l}\int_{x_{N-1}}^{x_N}(x-x_{N-1})sign\left(\cos\frac{k\pi x}{l}\right)\cos\frac{k\pi x}{l}dx=$$

$$=\frac{Ll}{\pi^2}\cdot\frac{1}{k^2}\sum_{\nu=0}^{N-2}sign\left(\cos\frac{k\pi x_\nu}{l}\right)\left(\cos\frac{k\pi}{l}x_{\nu+1/2}-\cos\frac{k\pi}{l}x_\nu-\cos\frac{k\pi}{l}x_{\nu+1}+\cos\frac{k\pi}{l}x_{\nu+1/2}\right)+$$

$$+\frac{L}{k\pi}sign\left(\cos\frac{k\pi x_{N-1}}{l}\right)\left(\Delta x_{N-1}\sin\frac{k\pi}{l}x_N-\frac{2l}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{l}\left(x_N-\frac{\Delta x_{N-1}}{2}\right)\sin\frac{k\pi}{l}\frac{\Delta x_{N-1}}{2}\right)\le$$

$$\le\frac{L}{l}\left(\frac{4l^2}{\pi^2k^2}\sum_{\nu=0}^{N-2}\left|\cos\frac{k\pi x_{\nu+1/2}}{l}\right|\sin^2\frac{k\pi\Delta x_\nu}{4l}+P_{a,1}(k)\right).$$

Аналогічно маємо $V_{b_k}\le\frac{L}{l}\left(\frac{4l^2}{\pi^2k^2}\sum\limits_{\nu=0}^{N-2}\left|\sin\frac{k\pi x_{\nu+1/2}}{l}\right|\sin^2\frac{k\pi\Delta x_\nu}{4l}+P_{b,1}(k)\right)$. $P_{a,1}(k)$ та $P_{b,1}(k)$ визначені в умові теореми.

Для V_{a_0} маємо:

$$V_{a_0}=\left|\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx-\frac{1}{l}\sum_{\nu=0}^{N-1}f_\nu\int_{x_{\nu-1/2}}^{x_{\nu+1/2}}dx\right|\le\frac{1}{l}\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{x_{\nu-1/2}}^{x_{\nu+1/2}}\left|f(x)-f_\nu\right|dx\le\frac{L}{l}\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{x_{\nu-1/2}}^{x_{\nu+1/2}}|x-x_\nu|dx=$$

$$=\frac{L}{l}\sum_{\nu=0}^{N-2}\left[\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1/2}}(x-x_\nu)dx-\int_{x_{\nu+1/2}}^{x_{\nu+1}}(x-x_{\nu+1})dx\right]+\frac{L}{l}\int_{x_{N-1}}^{x_N}(x-x_{N-1})dx=\frac{L}{4l}\sum_{\nu=0}^{N-2}\Delta^2x_\nu+\frac{L}{2l}\Delta^2x_{N-1}.$$

Остаточно маємо:

$$\frac{V_{a_0}}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(V_{a_k}\left|\cos\frac{k\pi x}{l}\right|+V_{b_k}\left|\sin\frac{k\pi x}{l}\right|\right)\le\frac{L}{l}\left\{\sum_{\nu=0}^{N-2}\left[\frac{\Delta^2 x_\nu}{8}+4\frac{l^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\sin^2\frac{k\pi\Delta x_\nu}{4l}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\left|\cos\frac{k\pi x_{\nu+1/2}}{l}\right|\cdot\left|\cos\frac{k\pi x}{l}\right|+\left|\sin\frac{k\pi x_{\nu+1/2}}{l}\right|\cdot\left|\sin\frac{k\pi x}{l}\right|\right)\right]+\frac{\Delta^2 x_{N-1}}{4}+\sum_{k=1}^{n}\left(P_a(k)+P_b(k)\right)\right\}. \quad (11)$$

Застосувавши до співвідношення (5) оцінки (10), (11), отримаємо оцінку (7). Теорему доведено.

Висновки. Запропоновано ефективні за точністю алгоритми апроксимації функцій із класу Ліпшиця за допомогою рядів Фур'є з використанням для визначення коефіцієнтів Фур'є оптимальних за точністю на класі Ліпшиця і близьких до них квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилювальних функцій.

Література

[1] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматлит, 2003. Т. 3. – 662 с.
[2] Stepanets A.I. Methods of Approximation Theory . – VSP: Leiden, Boston, 2005. – 919 p.
[3] Задирака В. К., Мельникова С. С. Цифровая обработка сигналов. – К.: Наукова думка, 1993. – 294 с.
[4] Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М., Мельникова С.С., Нечуйвітер О.П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування. Т.1 Алгоритми. – К.: Наукова думка, 2011. – 447 с. Т.2 Застосування. – К.: Наукова думка, 2011. – 346 с.
[5] Коломис О.М., Луц Л.В., Людвиченко В.О. Апроксимація функцій деяких класів рядами Фур’є // Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII): праці міжнародної молодіжної математичної школи, 22–29 вересня 2011. – К., 2011. – С. 74–75.
[6] Коломис О.М. Ефективні за точністю алгоритми апроксимації функцій із класу Гельдера рядами Фур’є // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології: зб. наук. праць. –2021. –Вип. 32. – С. 159–164.
[7] Луц Л.В. Оцінка якості деяких квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій // Штучний інтелект. – 2008. – № 4.– С. 671–682.

Effective by precision algorithms for approximation of functions from the Lipschitz class by Fourier’s series

Olena Kolomys, Liliya Luts

Effective by precision algorithm for approximation of functions from the Lipschitz class by Fourier’s series is developed. The error of approximation of the function is obtained, which consists of two parts: the error arising from the use of a finite number of terms of the series, and the error arising from the approximate determination of the Fourier series coefficients using quadrature formulas for calculating integrals of fast oscillating functions that are optimal in order of accuracy on the Lipschitz class.

Отримано 15.03.23