УДК 519.65
doi.org/10.15407/fmmit2023.36.073

Наближення розв'язку крайової задачі інтерполяційним функціональним поліномом другого порядку

Ігор Демків

д. ф.-м. н., професор, Національний університет "Львівська політехніка", вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна, e-mail: ihor.i.demkiv@lpnu.ua

У роботі розглядається крайова задача другого порядку. Для наближеного розв'язку цієї крайової задачі на континуальній множині вузлів будується інтерполяційний функціональний поліном Ньютона другого порядку. Відомо, що необхідною і достатньою умовою того, щоб вказаний поліном був інтерполяційним для розв'язку крайової задачі на континуальній множині інтерполяційних вузлів є виконання правила підстановки. Показано, що для цього функціонального полінома Ньютона другого порядку виконується правило підстановки. Для знаходження функції Гріна відповідної крайової задачі зводимо її до задач Коші. Одержані диференціальні рівняння мають кусково сталий коефіцієнт, тому його можна найти у явному вигляді. Таким чином одержуємо інтерполяційний функціональний поліном типу Ньютона другого степеня, який буде наближенням до розв'язку крайової задачі.

Ключові слова: інтерполяція, вузли інтерполяції, континуальна множина вузлів, поліноміальна інтерполяція функціоналів.

Вступ. Узагальненням класичної теорії інтерполювання функцій однієї змінної, на випадок нелінійних функціоналів та операторів, займалися багато авторів (див., наприклад, [1-8]). Згідно роботи [9] запишемо функціональний інтерполяційний поліном типу Ньютона другого порядку

$$P_n(x(\cdot)) = K_0 + \int_0^1 K_1(z_1)\left[x(z_1) - x_0(z_1)\right]dz_1 + \int_0^1\int_{z_1}^1 K_2(\vec{z}^{\,2})\prod_{i=1}^{2}\left[x(z_i) - x_{i-1}(z_i)\right]dz_2 dz_1, \qquad (1)$$

де через $x_i(z) \in Q[0,1]$, $i = 0,1,2$ позначені довільні, фіксовані елементи з простору $Q[0,1]$ - кусково-неперервних на відрізку $[0,1]$ функцій зі скінченою кількістю точок розриву першого роду. Для відшукання ядер K_0, $K_s\left(\vec{z}^{\,s}\right)$, $s = \overline{1,2}$ було введено континуальну множину вузлів

$$x^2\left(z,\vec{\xi}^{\,2}\right) = x_0(z) + H(z-\xi_1)\left[x_1(z) - x_0(z)\right] + H(z-\xi_2)\left[x_2(z) - x_1(z)\right],$$

$$z \in [0,1], \quad \ldots\vec{\xi}^{\,2} = (\xi_1,\xi_2) \in \overline{\Omega}_2 = \left\{\vec{z}^{\,2} = (z_1,z_2) : 0 \le z_1 \le z_2 \le 1\right\}, \qquad (2)$$

і поставлені континуальні інтерполяційні умови

$$P_2^I\left(x^2\left(\cdot,\vec{\xi}^{\,2}\right)\right)=F\left(x^2\left(\cdot,\vec{\xi}^{\,2}\right)\right),\quad \forall\vec{\xi}^{\,2}\in\overline{\Omega}_2,$$

де $H(z)$ - функція Хевісайда.

У вищезгаданій роботі було показано, що необхідними умовами інтерполяційності полінома (1) на континуальних вузлах (2) є визначення його ядер за формулами

$$K_0=F\left(x_0(\cdot)\right),$$

$$K_s\left(\vec{z}^{\,s}\right)=(-1)^s\prod_{i=1}^{s}\left[x_i(z_i)-x_{i-1}(z_i)\right]^{-1}\frac{\partial^s}{\partial z_1\ldots\partial z_s}F\left(x^s\left(\cdot,\vec{z}^{\,s}\right)\right),\quad s=\overline{1,2}\quad .$$

Для забезпечення достатньої умови інтерполяційності полінома $P_2\left(x(\cdot)\right)$ на континуальних вузлах (2) вимагалось виконання правила підстановки

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\left[F\left(x^2\left(\cdot,\vec{z}^{\,2}\right)\right)\Big|_{z_2=z_1}\right]=\left[\frac{\partial}{\partial z_1}F\left(x\left(\cdot,\vec{z}^{\,2}\right)\right)\right]\Bigg|_{z_2=z_1}\frac{x_2(z_1)-x_0(z_1)}{x_1(z_1)-x_0(z_1)}\ . \tag{3}$$

Метою цієї роботи є побудова і обгрунтування інтерполяційного функціонального полінома другого степеня для наближення розв’язку крайової задачі другого порядку.

1. **Постановка задачі**

Застосовуючи функціональний поліном Ньютона (1), (2) треба побудувати наближення до розв’язку крайової задачі (4), (5)

$$U''\left(x;q(\cdot)\right)-q(x)U\left(x;q(\cdot)\right)=-f(x),\qquad x\in(0,1), \tag{4}$$

$$U\left(0;q(\cdot)\right)=0,\qquad U'\left(1;q(\cdot)\right)=0. \tag{5}$$

При фіксованій функції $f(x)$ роз’язок задачі (4), (5) можна розглядати як нелінійний оператор відносно $q(x)$. Введемо континуальні інтерполяційні вузли

$$q^2\left(x,\vec{\xi}^{\,2}\right)=\frac{1}{2}H(x-\xi_1)+\frac{1}{2}H(x-\xi_2), \tag{6}$$

де

$$0\le\xi_1\le\xi_2\le1 \tag{7}$$

і каркасом цих вузлів є

$$q_i(x)=\frac{i}{n},\quad i=\overline{0,2}.$$

2. **Побудова і обгрунтування інтерполяційного функціонального полінома**

Запишемо інтерполяційний функціональний поліном типу Ньютона другого степеня

$$U_2\left(x;q(\cdot)\right)=K_0\left(x;q(\cdot)\right)+2\int_0^1 K_1\left(x;q(\cdot)\right)\left(q(z_1)-\frac{1}{2}\right)dz_1+$$

$$+2\int_0^1\int_{z_1}^1 K_2\left(x;q(\cdot)\right)\left(q(z_1)-\frac{1}{2}\right)\left(q(z_2)-1\right)dz_2dz_1\,, \tag{8}$$

де

$$K_i\left(x;q(\cdot)\right)=(-1)^i\frac{\partial^i}{\partial z_1\ldots\partial z_i}U\left(x;q^i\left(x;\vec{z}^{\,i}\right)\right),\quad i=\overline{1,2}\,,\quad K_0\left(x;q(\cdot)\right)=U\left(x;0\right). \tag{9}$$

Згідно із теоремою 2.1 [9] необхідною і достатньою умовою того, щоб поліном (8), (9) був інтерполяційним для розв'язку крайової задачі (4), (5) на континуальній множині інтерполяційних вузлів (6), (7), тобто, щоб виконувались умови

$$U\left(x;q^2\left(\cdot,\vec{\xi}^{\,2}\right)\right)=U_2\left(x;q^2\left(\cdot,\vec{\xi}^{\,2}\right)\right),\qquad \forall\,\vec{\xi}^{\,2}\in\Omega_2\,, \tag{10}$$

є виконання правила підстановки

$$\left[\frac{\partial}{\partial\xi_1}U\left(x;q^2\left(\cdot,\vec{\xi}^{\,2}\right)\right)\right]_{\xi_2=\xi_1}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi_1}U\left(x;q^2\left(\cdot;\vec{\xi}^{\,2}\Big|_{\xi_2=\xi_1}\right)\right), \tag{11}$$

Правильною є

Лема. *Розв'язок крайової задачі (4), (5), якщо розглядати його як нелінійний оператор від* $q(x)$*, задовільняє правилу підстановки (11).*

Доведення. Маємо наступну крайову задачу

$$\frac{dU\left(x,\vec{\xi}^{\,2}\right)}{dx^2}-\frac{1}{2}\left(H(x-\xi_1)+H(x-\xi_2)\right)U\left(x,\vec{\xi}^{\,2}\right)=-f(x),\quad x\in(0,1)\,, \tag{12}$$

$$U\left(0;q^2\left(\cdot;\vec{\xi}^{\,2}\right)\right)=0,\qquad U\left(1;q^2\left(\cdot;\vec{\xi}^{\,2}\right)\right)=0. \tag{13}$$

Із (12), (13), як наслідки, маємо дві крайові задачі з однаковим диференціальним оператором, праві частини в диференціальних рівняннях яких відрізняються числовим множником

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{\partial U\left(x,\vec{\xi}^{\,2}\right)}{\partial\xi_1}\right]_{\xi_2=\xi_1}-H(x-\xi_1)\left[\frac{\partial U\left(x,\vec{\xi}^{\,2}\right)}{\partial\xi_1}\right]_{\xi_2=\xi_1}=\frac{1}{2}\frac{dH(x-\xi_1)}{d\xi_1}U\left(x,q^i\left(\cdot,\vec{\xi}^{\,2}\right)\right)\Big|_{\xi_2=\xi_1}$$

,

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{d}{d\xi_1}U\left(x,\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_1\end{pmatrix}\right)\right]-H(x-\xi_1)\frac{d}{d\xi_1}U\left(x,\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_1\end{pmatrix}\right)=\frac{\partial H(x-\xi_1)}{\partial\xi_1}U\left(x,\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_1\end{pmatrix}\right).$$

Порівняння цих двох рівнянь із врахуванням крайових умов доводить, що має місце співвідношення

$$\left.\frac{\partial U\left(x,\vec{\xi}^{\,2}\right)}{\partial \xi_1}\right|_{\xi_2=\xi_1} = \frac{1}{2}\frac{\partial U\left(x,\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_1\end{pmatrix}\right)}{\partial \xi_1},$$

тобто має місце правило підстановки.

Для побудови інтерполянта (8), (9) треба знайти розв'язки задач (12), (13). Маємо

$$U(x;0)=K_0\left(x;q(\cdot)\right)=\int_0^1 G_0(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi,$$

$$U\left(x;q^i\left(\cdot;\vec{\xi}^{\,i}\right)\right)=\int_0^1 G_i(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi, \quad i=\overline{1,2},$$

де $G_i(x,\xi),\ i=\overline{0,2}$ – функції Гріна відповідних крайових задач

$$G_0(x,\xi)=\begin{cases} x(1-\xi), & 0\le x\le\xi\\ \xi(1-x), & \xi\le x\le 1,\end{cases}$$

$$G_i(x,\xi)=\frac{1}{V_{1,i}(1)}\begin{cases} V_{1,i}(x)V_{2,i}(\xi), & 0\le x\le\xi\\ V_{2,i}(x)V_{1,i}(\xi), & \xi\le x\le 1.\end{cases}$$

Тут $V_{1,i}(x),\ V_{2,i}(x)$ – розв'язки наступних задач Коші:

$$\frac{d^2V_{\alpha i}(x)}{dx^2}-\sum_{p=1}^{i}\frac{1}{2}H\left(x-\xi_p\right)V_{\alpha i}(x)=0, \qquad x\in(0,1), \qquad \alpha=1,2;$$

$$V_{1i}(0)=0; \qquad \frac{dV_{1i}(0)}{dx}=1; \qquad V_{2i}(1)=0; \qquad \frac{dV_{2i}(1)}{dx}=-1.$$

Знайти в явному вигляді функції $V_{1,i}(x),\ V_{2,i}(x)$ досить просто, бо диференціальні рівняння, якому вони задовольняють, має кусково сталий коефіцієнт. Так при $i=1$

$$V_{11}(x)=\begin{cases} x, \quad 0\le x\le\xi_1\\ \sqrt{n}\sinh\frac{1}{\sqrt{n}}\left(x-\xi_1\right)+x\cosh\frac{1}{\sqrt{n}}\left(x-\xi_1\right), \quad \xi_1\le x\le 1,\end{cases}$$

$$V_{21}(x)=\begin{cases} \sqrt{n}\sinh\frac{1}{\sqrt{n}}(1-x), \quad \xi_1\le x\le 1\\ -\cosh\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\xi_1\right)\left(x-\xi_1\right)+\sqrt{n}\sinh\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\xi_1\right), \quad 0\le x\le\xi_1.\end{cases}$$

Висновок. Таким чином одержали інтерполяційний функціональний поліном типу Ньютона другого степеня (8), (9) який буде наближенням до розв'язку крайової задачі (4), (5).

Література

[1] Ульм С. Об обобщенных разделенных разностях / С. Ульм // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1967. —V. 16.No. 1.— P. 13 — 26.
[2] Prenter P.M. Lagrange and Hermite interpolation in Banach spaces / P.M. Prenter // Appr. Theory. — 1971. —V. 4.No. 4.— P. 419 – 432.
[3] Porter W.A. Data interpolation: causality structure and system identification / W.A. Porter // Inf. and Contr. — 1975. —V. 29.No. 3.— P. 217 – 233.
[4] Kergin P. A natural interpolation of functions / P. Kergin // J. Approx. Theory. — 1980. —V. 19.No. 4.— P. 278 – 293.
[5] Micchelli C.A. A constructive approach to Kergin interpolation in R^k / C.A. Micchelli // Rocky Mountain J. Math. — 1980. —No. 10.— P. 485 — 497.
[6] Andersson M. Complex Kergin Interpolation / M. Andersson, M. Passare // J.Approx. Theory. — 1991. —No. 64.— P. 214 — 225.
[7] Filipsson L. Kergin interpolation in Banach spaces / L. Filipsson // J.Approx. Theory. — 2004. —No. 127.— P. 108 — 123.
[8] Янович Л.А. Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам / Л.А. Янович - Мн.: Наука и тэхника, 1976. - 384 с.
[9] Макаров В.Л. Необхідні і достатні умови існування функціонального ін¬тер¬по¬ля¬цій¬ного полінома на континуальній множині вузлів / В.Л. Макаров, І.І. Демків, Б.Р. Михальчук // Доп. НАН України. — 2003. —№ 7.— С. 7 — 12.

Approximation of the solution of the boundary value problem by the interpolation functional polynomial of the second order

Ihor Demkiv

The work considers a boundary value problem of the second order. For the approximate solution of this boundary value problem, an interpolation functional Newton polynomial of the second order is constructed on a continuous set of nodes. It is known that the fulfillment of the substitution rule is a necessary and sufficient condition for the specified polynomial to be interpolating for the solution of the boundary value problem on a continuous set of interpolating nodes. It is shown that the substitution rule holds for this functional Newton polynomial of the second order. To find the Green's function of the corresponding boundary value problem, we reduce it to Cauchy problems. The resulting differential equations have a piecewise constant coefficient, so it can be found in an explicit form. In this way, we obtain an interpolation functional polynomial of the Newton type of the second degree, which will be an approximation to the solution of the boundary value problem.

Отримано 30.03.23