

Про один спосіб побудови ядра Коші сингулярного інтегрального рівняння для з'ясування напружено-деформованого стану клинної системи за антиплоскої деформації

Микола Махоркін^{1,3}, Ігор Махоркін², Андрій Кунинець³, Ярослав Глинський⁴.

¹ к. ф.-м. н., доц., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова 3-б, м. Львів, Україна, e-mail: mahorkin@ukr.net

² к. ф.-м. н., ст. н. с., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова 3-б, м. Львів, Україна

³ к. ф.-м. н., доц., Національний університет "Львівська політехніка", вул. С. Бандери 12, м. Львів, Україна,

⁴ к. ф.-м. н., доц., Національний університет "Львівська політехніка", вул. С. Бандери 12, м. Львів, Україна,

Запропоновано аналітико-числовий підхід до побудови сингулярного інтегрального рівняння (СІР) з ядром типу Коші, котре уможливує з'ясування напружено-деформованого стану багатоклинної систем з навантаженими радіальними тріщинами. Підхід ґрунтується на використанні теорії лишків та з'ясуванні періодичності розв'язків характеристичного рівняння багатоклинної системи. Підхід проілюстровано на прикладі побудови СІР з ядром типу Коші для двоклинної системи з навантаженою міжфазною тріщиною за умов антиплоскої деформації. Для окремих випадків геометричних та механічних параметрів двоклинної системи виконано обчислення величин, необхідних при побудові такого рівняння.

Ключові слова: сингулярне інтегральне рівняння, ядро Коші, теорія лишків, двоклинна система, радіальна тріщина.

Вступ. Адекватність оцінки надійності та довговічності різного роду устаткування суттєво залежить не лише від технології виготовлення і умов експлуатації, а й від фізико-механічної поведінки його конструктивних елементів. Зазвичай, ця поведінка залежить від: профілю; матеріалу, з якого його виготовлено; наявності гострокінцевих включень чи вирізів; особливостей межі поділу матеріалів у композитних деталях. Для врахування їх впливу на надійність та довговічність є необхідна інформація про процеси руйнування, а саме про зародження тріщин та з'ясування подальшого напрямку їх розвитку. Ці дані можна отримати не лише у результаті коштовних експериментів з руйнування зразків але й за допомогою математичного моделювання фізико-механічних полів всередині об'єкта досліджень.

Особливу увагу при цьому приділяють вивченню поля напружень в околі так званих концентраторів напружень, де, як правило, відбувається руйнування конструкції. Такими концентраторами можуть виступати з'єднання двох чи більше матеріалів, вихід на цю межу тонких дефектів, кінці тонких неоднорідностей всередині матеріалу тощо. Вивчення напруженого стану в околі таких точок, де виникає концентрація напружень здійснюють за допомогою модельних задач, а саме клинових структур з радіальними дефектами чи без них [1-4]. Вивченню таких задач було приділено багато уваги: сингулярність та асимптотики напружень в околі вершини кутового вирізу пружної ізотропної матриці або однорідного клина вивчалися в роботах [5-6]; для клинових композитів, складених із двох та трьох матеріалів, сингулярність напружень проаналізовано в працях [3, 5, 7-9] (плоска задача) та [7, 10, 11] (антиплоска).

За наявності внутрішнього дефекту згадані задачі вирішувалися за допомогою використання методів комплексних потенціалів Колосова–Мухомелішвілі [8], функції напружень Ері [12, 13], методу сингулярних інтегральних рівнянь [1, 4] чи перетворення Мелліна [5, 11, 13], що призводило до необхідності розв'язувати системи сингулярних інтегральних рівнянь. Зазвичай через вигляд їх ядер це є окремою математичною задачею.

У даній статті запропоновано підхід до зведення інтегральних рівнянь, отриманих в результаті вивчення напружено-деформованого стану клинової системи з радіальними тріщинами, до сингулярних інтегральних рівнянь з ядром типу Коші. Його застосування проілюстровано на прикладі дослідження двоклинової системи.

1. Сингулярне інтегральне рівняння для двоклинової системи з радіальною тріщиною

Розглянемо двоклинову систему (рис. 2, а) складену з клинів S_1, S_2 з кутами розхилу α_1, α_2 та модулями зсуву μ_1, μ_2 відповідно. Система віднесена до полярної системи координат r, φ з центром в точці сходження клинів, кути φ відраховуються від незакріпленого краю кутового вирізу проти годинникової стрілки. Береги кутового вирізу $\varphi = 0$, та $\varphi = \varphi_2 = \alpha_1 + \alpha_2$ вільні від навантаження, а на лінії з'єднання клинів $\varphi = \varphi_1 = \alpha_1$ розташована тріщина, симетрично навантажена зусиллям $\tau(r)$, $a \leq r \leq b$, яку моделюємо за допомогою умов взаємодії

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi z}(r, \varphi_1 + 0) - \sigma_{\varphi z}(r, \varphi_1 - 0) &= f_{\sigma}(r)N(r) = 0, \\ \sigma_{\varphi z}(r, \varphi_1 + 0) + \sigma_{\varphi z}(r, \varphi_1 - 0) &= f_{\sigma i}^*(r)N(r) = 2\tau(r)N(r), \end{aligned} \quad (1)$$

де $N(r) = S_+(r-a) - S_+(r-b)$ – функція відрізка, $S_+ = \{1 (\xi > 0), 0 (\xi \leq 0)\}$ – одинична функція Гевісайда.

Отже, стрибок напружень у випадку симетрично навантаженої зусиллям $\tau_1(r)$ тріщини дорівнюватиме $f_{\sigma}(r) = 0$, а стрибок переміщень $f_w(r)$ буде

невідомий. Якщо б розглядали жорстке включення, то відомим був би саме стрибок переміщень, а невідомим – стрибок напружень.

Побудову виразів для з'ясування наружено-деформованого стану у такій двоклинової системі рис. 1 докладно описано у роботах [7, 10]. У цих роботах за допомогою методу постановки узагальненої задачі спряження [14], описана методика побудови СІР для визначення функцій стрибка переміщень і подальшого з'ясування поля напружень у складених із довільної кількості елементів композитних клинів. Не зупиняючись на викладках, запишемо вирази для напружень та переміщень у двоклинової системі рис. 1, що перебуває в умовах поздовжнього зсуву [7]:

$$w(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{w}(p, \varphi) r^{-p} dp, \quad \sigma_{\varphi z}(r, \varphi) = \frac{\mu}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\partial \tilde{w}(p, \varphi)}{\partial \varphi} r^{-p-1} dp$$

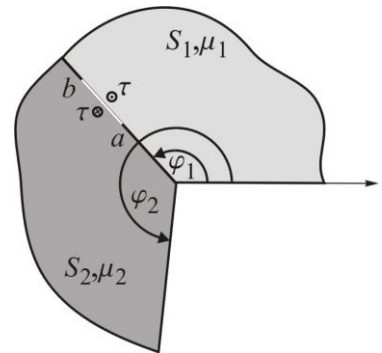


Рис.1

$$\sigma_{rz}(r, \varphi) = -\frac{\mu}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} p \tilde{w}(p, \varphi) r^{-p-1} dp,$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{w}(p, \varphi) &= \tilde{f}_{w1}(p) [p \tilde{g}_{A1}(p) \tilde{g}_1(p, \varphi) + \tilde{g}_3(p, \varphi)], \\ \tilde{g}_1(p, \varphi) &= \left(\cos p\varphi - \frac{\mu_2 - \mu_1}{p\mu_2} - p \sin p\varphi_1, \sin [p(\varphi - \varphi_1)] S_+(\varphi - \varphi_1) \right), \\ \tilde{g}_2(p, \varphi) &= \left(\sin p\varphi - \frac{\mu_2 - \mu_1}{p\mu_2} p \cos p\varphi_1 \sin [p(\varphi - \varphi_1)] S_+(\varphi - \varphi_1) \right), \\ \tilde{g}_3(p, \varphi) &= \cos [p(\varphi - \varphi_2)] S_+(\varphi - \varphi_2), \\ \tilde{g}_{A1}(p) &= \frac{(\mu_1 - \mu_2 \cos [p\varphi_2]) + (\mu_2 - \mu_1) \cos [\varphi_1] \cos [p(\varphi_2 - \varphi_1)]}{\mu_2 \mu_1 \Delta_1(p)}, \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = -p \sin p\varphi_2 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} p \sin p\varphi_1 \cos [p(\varphi_2 - \varphi_1)] \quad \tilde{g}_{B1}(p) = (p\mu_1)^{-1}.$$

Як видно із співвідношень (3), вирази для напружень та переміщень, за наявності міжфазної тріщини, залежать від невідомої функції стрибка переміщень $\tilde{f}_{w1}(r)$. Для її визначення використовуємо умови взаємодії (1) і отримане на їх основі сингулярне інтегральне рівняння Фредгольма першого роду –

$$\sigma(r, \varphi_1 - 0) = \frac{\mu_1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} p \tilde{f}_w(p) \tilde{K}(p) r^{-p} dp = r\tau(r)N(r), \quad a \leq r \leq b,$$

де

$$\tilde{K}(p) = \frac{\mu_2 \sin [p\varphi_1] \sin [p(\varphi_2 - \varphi_1)]}{(\mu_1 - \mu_2) \cos [p(\varphi_2 - \varphi_1)] \sin [p\varphi_1] + \mu_2 \sin [p\varphi_2]}.$$

Відшукування розв'язку такого рівняння є окремою задачею, один із шляхів вирішення якої запропоновано нижче.

2. Зведення СІР до рівняння з ядром Коші

Застосуємо до інтегралу в лівій частині рівняння (4) теорему про згортку [9]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} p \tilde{f}_w(p) \tilde{K}(p) r^{-p} dp = \int_0^{\infty} [-r f'_w(p)] K\left(\frac{r}{t}\right) \frac{dt}{t}, \quad a \leq t \leq b.$$

Орiginal ядра $\tilde{K}(p)$ (5) шукатимемо за допомогою формули обернення Мелліна у такому вигляді:

$$K = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{K}(p) r^{-p} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\mu_2 \sin [p\varphi_1] \sin [p(\varphi_2 - \varphi_1)]}{(\mu_1 - \mu_2) \cos [p(\varphi_2 - \varphi_1)] \sin [p\varphi_1] + \mu_2 \sin [p\varphi_2]} r^{-p} dp. \quad (7)$$

Для обчислення комплексного інтеграла (7) використаємо теорему про лишки [15]. Як показували дослідження [10, 16], полюси підінтегральної функції дійсні та розташовані симетрично відносно комплексної осі $p_{-i} = -p_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$. Враховуючи це, а також те, що $p_0 = 0$ також є полюсом, прийmemo $0 < c < p_1 < p_{i+1}$, де $p_i -$

додатні полюси підінтегральної функції. Відтак, виконуємо інтегрування з обходом через правий півпростір із розрізом по дійсній осі:

$$K = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{K}(p) r^{-p} dp = -\sum_{i=1}^{\infty} \text{Res} \left[\tilde{K}(p, \varphi) r^{-p}, p \rightarrow p_i \right] = -\sum_{i=1}^{\infty} R_i r^{-p_i},$$

де $R_i = \text{Res} \left[\tilde{K}(p, \varphi), p \rightarrow p_i \right] = \lim_{p \rightarrow p_i} \tilde{K}(p, \varphi)$ – лишок функції $\tilde{K}(p, \varphi)$ в полюсі p_i .

Зазначимо, що оскільки функція $\tilde{K}(p, \varphi)$ подана у вигляді частки двох голоморфних функцій, для обчислення відповідного лишку зручно застосовувати формулу

$$R_i = \frac{2\mu_2 \sin[p_i \varphi_1] \sin[p_i (\varphi_2 - \varphi_1)]}{(\mu_2 - \mu_1)(\varphi_2 - 2\varphi_1) \cos[p_i (\varphi_2 - \varphi_1)] \sin[\pi_i \varphi_1] + \mu_2 \sin[p_i \varphi_2]}.$$

Полюси підінтегральної функції є розв'язками рівняння

$$g(p) = (\mu_1 - \mu_2) \cos[p(\varphi_2 - \varphi_1)] \sin[p\varphi_1] + \mu_2 \sin[p\varphi_2] = 0,$$

яке тотожне характеристичним рівнянням для визначення порядку сингулярності напружень [7, 9, 16]. У загальному вигляді розв'язки цього рівняння запишуться так:

$$p_{il} = p_l + iT, \quad l = 1, 2, \dots, k,$$

де $T = \text{lcm} \left(\frac{2\pi}{2\varphi_1 - \varphi_2}, \frac{2\pi}{\varphi_2} \right)$ – основний період функції (10); k – кількість коренів p_l

рівняння (10), які належать напівінтервалу $(0; T]$.

Скориставшись властивостями періодичних функцій, з'ясуємо, що період T є водночас основним періодом функції, що описує лишки. Відтак, суму лишків (8) можна переписати у такому вигляді:

$$K = -\sum_{i=1}^{\infty} R_i r^{-p_i} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{l=1}^k R_l r^{-p_l - Tn} \right] = -\sum_{l=1}^k \left[R_l r^{-p_l} \sum_{n=0}^{\infty} r^{-Tn} \right] = \frac{r^T}{1 - r^T} \sum_{l=1}^k \left[R_l r^{-p_l} \right].$$

Підставимо отриманий вигляд (11) в інтегральне рівняння (4) і виконаємо відповідні спрощення, внаслідок чого воно набуде такого вигляду:

$$\int_a^b \frac{t^T f'_w}{t^T - r^T} \sum_{l=1}^k \left[R_l \left(\frac{t}{r} \right)^{p_l - T} \right] dt = -\frac{r}{\mu_1} \tau(r) N(r).$$

Виконаємо у рівнянні (12) заміну змінних

$$\Phi(u) = t^T f'_w, \quad u = \frac{a^T + b^T - 2t^T}{a^T - b^T}, \quad v = \frac{a^T + b^T - 2r^T}{a^T - b^T}, \quad -1 \leq u, v \leq 1,$$

$$t = \left[a^T + b^T + (b^T - a^T)u \right]^{\frac{1}{T}}, \quad r = \left[a^T + b^T + (b^T - a^T)v \right]^{\frac{1}{T}}$$

та запишемо новий вигляд рівняння –

$$\int_{-1}^1 \frac{\Phi(u)}{u-v} \sum_{l=1}^k \left[R_l \left(\frac{a^T + b^T + (b^T - a^T)u}{a^T + b^T + (b^T - a^T)v} \right)^{p_l - T} \right] dt = -\frac{\left[a^T + b^T + (b^T - a^T)v \right]^{\frac{1}{T}}}{\mu_1} \tau(v) N(v). \quad (13)$$

Щоб виділити сингулярну частину ядра інтегрального рівняння (13) розкладемо його по степенях v в околі точки $v = u$, внаслідок чого отримаємо, що

$$\frac{1}{u-v} \sum_{l=1}^k \left[R_l \left(\frac{a^T + b^T + (b^T - a^T)u}{a^T + b^T + (b^T - a^T)v} \right)^{p_l - T} \right] \sim \frac{1}{u-v} \sum_{l=1}^k R_l + o(v-u),$$

а відтак загальний вигляд сингулярного інтегрального рівняння буде такий:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi(u)}{u-v} dt + \int_{-1}^1 \Phi(u) K(u,v) dt = -T \left(\pi \mu_1 \sum_{l=1}^k R_l \right)^{-1} \left[\frac{a^T + b^T + (b^T - a^T)v}{\mu_1} \right]^{\frac{1}{T}} \tau(v) N(v).$$

$$K(u,v) = \left\{ \left(\pi(u-v) \sum_{l=1}^k R_l \right) - 1 \sum_{l=1}^k \left[R_l \left(\frac{a^T + b^T + (b^T - a^T)u}{a^T + b^T + (b^T - a^T)v} \right)^{p_l - T} \right] - \frac{1}{\pi(u-v)} \right\}.$$

Таким чином, шляхом низки аналітичних перетворень отримано сингулярне інтегральне рівняння з ядром типу Коші, для розв'язування якого можна застосувати стандартні методи, наприклад, описаний у [17] метод колокацій.

Зазначимо, що у випадку, коли тріщина розташована на бісектрисі однорідного клина чи на лінії з'єднання двох клинів з однаковими кутами розхилу, рівняння (14) набуде вигляду поданого у працях [1, 7]. Це, в свою чергу, підтверджує правотність здійснених викладок і достовірність отриманого результату.

3. Числові дослідження

Виконаємо аналіз розв'язків характеристичного рівняння (10), які є необхідними для побудови СІР з ядром Коші. При вивченні порядку сингулярності в околі точки сходження клинів важливими є корені характеристичного рівняння (10), що належать інтервалу $(-1; 0)$. Докладні дослідження залежності їх значень від геометричних та механічних характеристик системи неодноразово проводилися, зокрема і в працях [16] де здійснено різнопланові дослідження порядку сингулярності напружень для багатоклинових систем.

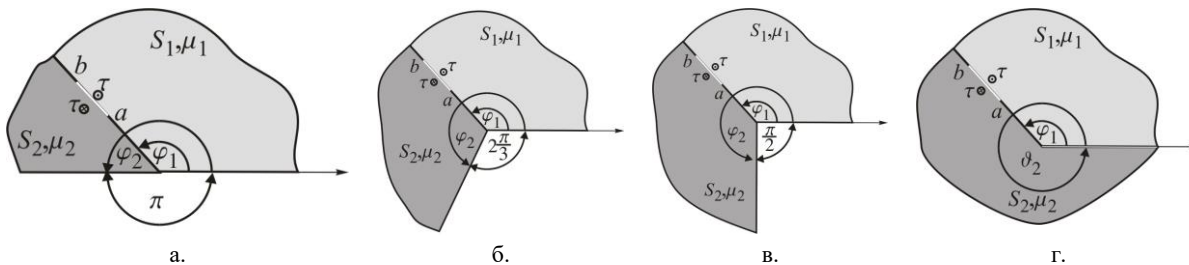


Рис. 2. Схеми двоклинових систем

Для побудови СІР з ядром Коші необхідно знайти усі розв'язки рівняння (10). Оскільки дане рівняння є в загальному випадку трансцендентним його переважно розв'язують за допомогою чисельних методів для чого важливим є знання періоду розв'язків T та значення величини k – їх кількості в межах напівінтервалу $p_l \in (0; T]$. Такі величина було визначено для деяких систем геометрія, яких описана сталим сумарним кутом φ_2 рис. 2 при змінному куті розхилу φ_1 клина S_1 . Результати цих досліджень подано у табл. 1, де представлено значення φ_1 , які відповідають періоду розв'язків T рівняння (10) та їх кількості k в межах напівінтервалу $(0; T]$.

Таблиця 1

Значення кутів φ_1 , які відповідають періоду T та кількості розв'язків k на півінтервалі $(0; T]$, за різних значень сумарного кута розхилу системи φ_2

$\varphi_2 = \pi$ (рис. 2а)												
T	k	φ_1										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	2	$\frac{\pi}{2}$										
4	4	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$									
6	6	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$							
12	12	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$							
18	18	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{2\pi}{18}$	$\frac{4\pi}{18}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{10\pi}{18}$	$\frac{11\pi}{18}$	$\frac{13\pi}{18}$	$\frac{14\pi}{18}$	$\frac{16\pi}{18}$	$\frac{17\pi}{18}$	
36	36	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{2\pi}{36}$	$\frac{7\pi}{36}$	$\frac{11\pi}{36}$	$\frac{13\pi}{36}$	$\frac{17\pi}{36}$	$\frac{19\pi}{36}$	$\frac{23\pi}{36}$	$\frac{25\pi}{36}$	$\frac{29\pi}{36}$	$\frac{35\pi}{36}$
$\varphi_2 = \frac{4\pi}{3}$ (рис. 2б)												
1	2	$\frac{2\pi}{3}$										
3	4	$\frac{\pi}{3}$	π									
6	8	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$							
12	16	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{17\pi}{12}$				

Продовження таблиці 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$ (рис. 2в)												
1	2	$\frac{3\pi}{4}$										
4	6	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{5\pi}{4}$							
12	18	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$

$\varphi_2 = 2\pi$ (рис. 2г)												
1	2	π										
2	4	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$									
3	6	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$							
4	8	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$							
6	12	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{6}$							
12	24	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{23\pi}{12}$				

Зазначимо, що при деяких геометричних характеристиках системи є можливим аналітичний розв'язок характеристичного рівняння, це питання докладно розглянуте у праці [10]. Наприклад у випадку $\varphi_2 = \pi$ рис. 2а аналітичні розв'язки знайдено у випадку таких значень кута φ_1 :

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \quad T = 8, \quad k = 8, \quad p_1 = 2 \quad p_2 = 4, \quad p_3 = 6, \quad p_4 = 8,$$

$$p_{5,6,7,8} = \frac{4}{\pi} \operatorname{Arg} \left(\pm \frac{\sqrt{3\mu_1 + \mu_2}}{2\sqrt{\mu_1 + \mu_2}} \pm i \frac{\sqrt{\mu_1 + 3\mu_2}}{2\sqrt{\mu_1 + \mu_2}} \right);$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad T = 4, \quad k = 4, \quad p_1 = 1 \quad p_2 = 2, \quad p_3 = 3, \quad p_4 = 4;$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \quad T = 8, \quad k = 8, \quad p_1 = 2 \quad p_2 = 4, \quad p_3 = 6, \quad p_4 = 8,$$

$$p_{5,6,7,8} = \frac{4}{\pi} \operatorname{Arg} \left(\pm \frac{\sqrt{\mu_1 + 3\mu_2}}{2\sqrt{\mu_1 + \mu_2}} \pm i \frac{\sqrt{3\mu_1 + \mu_2}}{2\sqrt{\mu_1 + \mu_2}} \right),$$

а для клинової систему зображеної на рис. 2 б ($\varphi_2 = \frac{4\pi}{3}$) –

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{3}, \quad T = 6, \quad k = 8, \quad p_1 = 1,5, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 4,5 \quad p_4 = 6,$$

$$p_{5,6,7,8} = \frac{3}{\pi} \operatorname{Arg} \left(\pm \frac{\sqrt{3\mu_1 + \mu_2}}{2\sqrt{\mu_1 + \mu_2}} \pm i \frac{\sqrt{\mu_1 + 3\mu_2}}{2\sqrt{\mu_1 + \mu_2}} \right);$$

$$\varphi_1 = 2\frac{\pi}{3}, \quad T = 3, \quad k = 4, \quad p_1 = 0,75, \quad p_2 = 1,5, \quad p_3 = 2,25, \quad p_4 = 3;$$

$$\varphi_1 = \pi, \quad T = 6, \quad k = 8, \quad p_1 = 1,5, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 4,5 \quad p_4 = 6,$$

$$p_{5,6,7,8} = \frac{3}{\pi} \operatorname{Arg} \left(\pm \frac{\sqrt{\mu_1 + 3\mu_2}}{2\sqrt{\mu_1 + \mu_2}} \pm i \frac{\sqrt{3\mu_1 + \mu_2}}{2\sqrt{\mu_1 + \mu_2}} \right).$$

Тут $\operatorname{Arg}(x + iy) \in [0; 2\pi]$ – аргумент відповідного комплексного числа.

Як показали дослідження період розв'язків та їх кількість на півнітервалі $(0; T]$ не залежить від механічних характеристик елементів системи.

Висновки

У даній статті запропоновано аналітичний підхід до побудови СІР з ядром типу Коші, котре уможливило з'ясування напружено-деформованого стану двоклинової системи з навантаженою міжфазною тріщиною. Обчислено і подано у вигляді таблиці значення величин необхідних для побудови цього рівняння при різних значеннях геометричних характеристик системи. Також для окремих випадків записано аналітичні вирази для обчислення полюсів відповідної підінтегральної функції. З'ясовано, що на такі величини як період полюсів T та їх кількість в межах одного періоду $p_l \in (0; T]$ механічні характеристики системи не впливають.

Достовірність отриманих результатів забезпечена строгістю математичного апарату та збігом у частковому випадку отриманого рівняння з відомими в літературі рівняннями. Також слід окремо зазначити, що викладки, подані у статті для випадку двох клинів, справедливі і для більшої кількості елементів системи. Відтак, можна стверджувати, що запропонований підхід успішно використовуватиметься і для побудови відповідного СІР з ядром Коші та подальшого з'ясування напружено-деформованого стану складеної з довільної кількості клинів багатоклинової системи.

Література

1. *Саврук М. П.* Поздовжній зсув пружного клина з тріщинами та вирізами. Фіз.-хім. механіка матеріалів. 2002. № 5. С. 57–65.
2. *Carpinteri A., Paggi M.* Singular harmonic problems at a wedge vertex: mathematical analogies between elasticity, diffusion, electromagnetism, and fluid dynamics. Journal of Mechanics of Materials and Structures. 2011. Vol. 6, iss.1-4. P. 113–125
3. *Jiménez-Alfaro S., Villalba V., Mantić V.* Singular elastic solutions in corners with spring boundary conditions under anti-plane shear. International Journal of Fracture. 2020. 223(1-2). P. 197–220. doi: [10.1007/s10704-020-00443-5](https://doi.org/10.1007/s10704-020-00443-5)
4. *Savruk M., Kazberuk A.* Stress concentration at notches. Springer International Publishing. AG, 2016.
5. *Боджи Д. Б.* Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных по граням упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора. Труды АОИМ. Сер. Прикладная механика. 1971. Т. 38, № 2. С. 87–96
6. *Carpinteri A., Paggi M.* On the asymptotic stress field in angularly nonhomogeneous materials. Int. J. Fract. 2005. Vol. 135, No. 4. P. 267–283.
7. *Махоркін М., Махоркіна Т., Пукач П.* Математичне моделювання напружено-деформованого стану композитних клиноподібних елементів конструкцій. Вісник Львівського національного аграрного університету: агроінженерні дослідження. 2021. Т. 24. С. 121-130.
8. *Picu C. R., Gupta V.* Stress singularities at triple junctions with freely sliding grains. Int. J. Solids Struct. 1996. Vol. 33, No. 11. P. 1535–1541.
9. *Махоркін М.І.* Визначення напружено деформованого стану багатоклинового композиту за умов плоскої задачі теорії пружності. Вісник Запорізького національного університету. 2015. №1. С. 107 – 117.
10. *Makhorkin M., Makhorkina T.* Analytical determination of the order of stress field singularity in some configurations of multiwedge systems for the case of antiplane deformation. Econtechmod. An international quarterly journal. 2017. Vol. 6, No. 3. P. 45–52.
11. *Shahani A. R., Adibnazari S.* Analysis of perfectly bonded wedges and bonded wedges with an interfacial crack under antiplane shear loading. *Int. J. Solids Struct.* 2000. Vol. 37. No. 19. P. 2639–2650.
12. *Pageau S. S., Josef P. F., Bigger S. B.* The order of stress singularities for bonded and debonded three-material junctions. Int. J. Solids Struct. 1994. Vol. 31, No. 21. P. 2979–2997
13. *Shahani A. R.* Mode III stress intensity factors in an interfacial crack in dissimilar bonded materials. *Arch. Appl. Mech. (Ing. Ar.)*. 2006. Vol. 75, No. 6-7. P. 405–411.

Микола Махоркін, Ігор Махоркін, Андрій Кунинець, Ярослав Глинський

Про один спосіб побудови ядра коші сингулярного інтегрального рівняння для з'ясування напружено-деформованого стану клинної системи за антиплоскої деформації

14. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. Львів: СПОЛІОМ, 2003. 318 с.
15. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – М.: Наука, 1963. –368 с.
16. Махоркін М., Сулим Г. Застосування апарата узагальнених функцій до визначення порядку сингулярності за поздовжнього зсуву у клинній системі. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 2006. Вип.65. С. 128 - 136.
17. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пластичності та міцності. – Львів: Світ, 1999. – I–II. – 944 с

On one method of constructing the cauchy kernel of the singular integral equation for clarify the stress-strain state of the wedge system under anti-plane deformation

Mykola Makhorkin, Igor Makhorkin, Andriy Kunynets, Yaroslav Hlynskyi

An analytical approach to the construction of a singular integral equation (SIE) with Cauchy kernel is proposed, which makes it possible to clarify the stress-strain state of multi-wedge system with loaded radial cracks. This approach is based on the use of the theory of residues and the clarification of the solutions periodicity of the multi-wedge system characteristic equation. It is illustrated on the example of the construction of a SIE with Cauchy kernel for a two-wedge system with a loaded interfacial crack under the conditions of anti-plane deformation. For particular cases of geometric and mechanical parameters of the two-wedge system, the values necessary for constructing such an equation were calculated.

Отримано 15.12.22.