УДК 51-7:519.87
doi.org/10.15407/fmmit2022.34-35.091

Побудова регресійних залежностей з використанням ортогональних перетворень та теорії моментів

Ярослав П'янило[1], Олег Худолій[2], Анатолій Лопатьєв[3], Олександр Калиніченко[4]

[1]Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України,
[2]Харківський національний педагогічний університет ім. Г.С. Сковороди
[3]Львівський державний університет фізичної культури ім. Івана Боберського,
[4]Львівський національний університет ветеринарної медицини та біотехнології ім. С.З. Ґжицького

В роботі досліджуються питання побудови регресійних та емпіричних залежностей для вивчення процесів, які описуються часовими рядами дискретних даних.

Ключові слова – методи оброблення цифрової інформації, спектральні методи, моменти, інваріанти.

Об'єктом дослідження є табульовані та експериментальні дані природних процесів.

Метою роботи є використання ортогональних базисів і статистично-ймовірностних методів для обробки цифрової інформації та побудови емпіричних залежностей між параметрами процесів, які вивчаються.

Вступ. Одним з основних постулатів класичного регресійного аналізу є припущення, що найкращі оцінки параметрів можна одержати, використовуючи метод найменших квадратів. На практиці оцінки, одержані за допомогою цього методу, часто бувають недостатньо точними і містять великі похибки. Причиною цього може бути структура регресійної моделі. Найчастіше задачу побудови регресійної моделі формулюють так. Необхідно знайти функцію заданого класу, для якої функціонал [2]:

$$F(\alpha) = \sum_{i=1}^{n}[z_i(\alpha, X) - y_i]^2 \to \min \qquad (1)$$

У виразі (1) $z_i(\alpha, X)$– значення функції, що апроксимує залежність, в i - ій точці, y_i– відповідне значення емпіричної залежності, α – вектор параметрів, які треба знайти, X – вектор незалежних змінних. Одержану функцію $z_i(\alpha, X)$ називають (середньоквадратичною) регресійною моделлю. Метод її пошуку, який базується на застосуванні критерію (1), називають методом найменших квадратів.

1. **Спектральні методи побудови апроксимуючої функції.** Нехай многочлени $u_n(x)$ ортогональні на проміжку $[a, b]$ з ваговою функцією

$\omega(x)$ і функція $\varphi(x)$ представляється ортогональним рядом за [1]:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n}{r_n} u_n(x) \quad , \quad \varphi_n = \int_a^b \omega(x)\varphi(x)\, u_n(x) dx,$$

де r_n - нормуючий множник. Відомо [1], що $N+1$–ий ортогональний многочлен має $N+1$ дійсний корінь, який належить проміжку ортогональності. Для обчислення узагальнених спектрів φ_n має місце оптимальна в класі L_2 квадратурна формула:

$$\varphi_n \approx \sum_{j=0}^{N} \rho_j^2 \, u_n(x_j) \, \varphi(x_j) \quad , \tag{2}$$

де $x_j j = \overline{1, N+1}$, - корені многочлена$u_{N+1}(x)$, тобто $u_{N+1}(x_j) = 0$ та

$$\rho_j^{-2} = \sum_{i=0}^{N} u_i^2(x_j).$$

Достатньо поширеним ортогональним базисом є базис многочленів Якобі $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ де $\alpha > -1,\ \beta > -1$ – вільні параметри, n – порядок многочлена, $\omega(x) = (1-x)^{\alpha}\ (1+x)^{\beta}$– вагова функція для многочленів Якобі. Подання функції рядом Фур'є-Якобі можна декількома способами:

$$1)\ \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n}{r_n} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \quad ;$$

$$2)\ \varphi(x) = \omega(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n}{r_n} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \quad ;$$

$$3)\ \varphi(x) = (1-x)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n}{r_n} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \quad ;$$

$$4)\ \varphi(x) = (1+x)^{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n}{r_n} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \quad .$$

Вибором вигляду подання функції, поданим вище способом, можна врахувати поведінку функції на одному, або обидвох, проміжках визначеності. Це дасть можливість пришвидшити збіжність ряду, що приведе до зменшення накопичення похибки при сумуванні.

2. Моменти та інваріанти в обробці цифрової інформації та їх зв'язок із спектральними методами.

2.1. Одновимірний випадок.

Застосування ортогональних розкладів тісно пов'язане з спектральними моментами в статистично-ймовірнісних методах оброблення цифрової інформації. Таке поєднання доцільно використовувати для зменшення похибки при наближенні до початкового значення аргументу функції розподілу, де вона виникає при використанні замість функції розподілу моментів для спрощення аналізу [2, 4]. Введення поняття спектральних моментів розподілу дозволить спростити розрахунки при підсумовуванні декількох похибок при їх квантильній оцінці.

Початковим моментом *k*-го порядку випадкової величини *X* називається математичне сподівання *k*-го ступеня *X*, тобто:

$$M_k(X) = \int_a^b x^k f(x)\, dx = a_k.$$

Центральним моментом *k*-го порядку називають математичне сподівання *k*-го ступеня відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$\mu_k = \int_a^b (x - a_1)^k f(x)\, dx.$$

Центральні моменти використовуються для кількісної характеристики розподілу випадкової величини.

Коефіцієнтом асиметрії C_s називається відношення центрального моменту третього порядку до кубу середнього квадратичного відхилення

$$C_s = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}.$$

Коефіцієнт ексцесу випадкових величин обчислюється за формулою

$$E_s = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3.$$

Використання ортогональних розкладів дає можливість розв’язати декілька задач оброблення цифрової інформації – апроксимація сигналу та фільтрація від адитивного шуму. Разом з тим, використовуючи зв’язок між коефіцієнтами ортогональних розкладів та статистичними параметрами, за відомими коефіцієнтами можна оцінити їх вірогідність та інші ймовірносно-статистичні параметри.

Теорема. Нехай функція $\varphi(x)$ розкладається в ряд за многочленами Якобі. Тоді має місце рівність:

$$\mu_n = \frac{1}{\eta_{nn}(\alpha,\beta)}\left(\varphi_n - \sum_{j=0}^{n-1} \eta_{jn}(\alpha,\beta)\mu_j\right).$$

2.2. Двовимірний випадок

Двовимірний момент порядку $(p+q)$матриці $f(x,y)$ визначається формулою [4,5]

$$m_{pq} = \sum_x \sum_y x^p y^q f(x,y)$$

для $p, q = 0,1,\cdots$.Сумування ведеться по всіх значеннях цієї матриці.

Центральний момент задається формулою

$$m_{pq} = \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q f(x,y).$$

Тут

$$\bar{x} = m_{10}/m_{00}, \quad \bar{y} = m_{10}/m_{00}.$$

Нормуючий центральний момент порядку $(p+q)$ обчислюється за формулою

$$\eta_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{pq}^{\gamma}}, \quad \gamma = \frac{(p+q)}{2} + 1.$$

В процесі оброблення цифрової інформації, особливо аналізу зображень, можна використовувати перших сім інваріантів:

$$\phi_1 = \eta_{20} + \eta_{02}, \quad \phi_2 = (\eta_{20} + \eta_{02})^2 + 4\eta_{11}^2, \quad \phi_3 = (\eta_{30} - 3\eta_{12})^2 + (3\eta_{21} - \eta_{03})^2,$$

$$\phi_4 = (\eta_{30} + \eta_{12})^2 + (\eta_{21} + \eta_{03})^2,$$

$$\phi_5 = (\eta_{30} - 3\eta_{12})(\eta_{30} + \eta_{12})[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} + \eta_{03})^2] +$$
$$(3\eta_{21} - \eta_{03})(\eta_{21} + \eta_{03})[3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2],$$

$$\phi_6 = (\eta_{20} - \eta_{02})[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2] + 4\eta_{11}(\eta_{30} + \eta_{12})(\eta_{21} + \eta_{03}),$$

$$\phi_7 = (3\eta_{21} - \eta_{03})(\eta_{30} + \eta_{12})[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} + \eta_{03})^2] - (\eta_{30} - 3\eta_{12})(\eta_{21} + \eta_{03})[3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2].$$

Використання поданих інваріантів залежить від поставленої задачі, яку необхідно вирішити. Як правило, на практиці використовуються перших декілька інваріантів.

Відзначимо, що моменти та інваріанти використовуються і в інших галузях науки та техніки, зокрема в машинобудуванні: інваріант сумарної потужності; інваріант кінетичної потужності; інваріант моментів кручення та інші.

3. Математичне моделювання у фізичному вихованні.

Поряд з моделюванням біологічних та природних об’єктів і процесів та рухових дій у спорті, можна моделювати процес навчання і розвитку рухових здібностей. Моделювання процесу формування рухових навичок відноситься до побудови моделей в умовах значної невизначеності [3].

До об’єктів, які вивчаються за допомогою математичного моделювання у фізичному вихованні відносяться (рис. 1):

- вікова динаміка функціонального стану серцево-судинної системи та рухової підготовленості дітей і підлітків;
- режими виконання фізичних вправ і їх вплив на результативність діяльності;
- процес рухової підготовки дітей і підлітків.

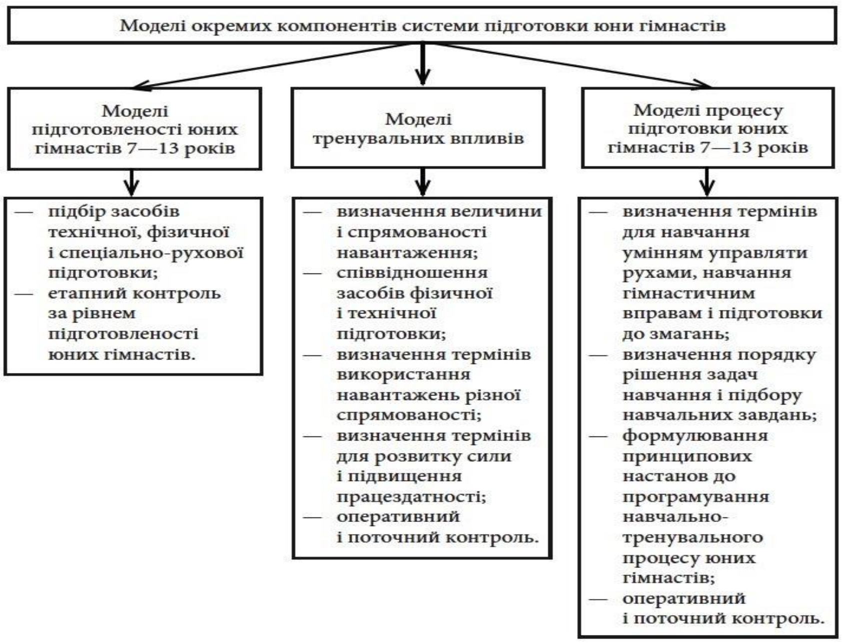

Рис. 1. Структурна схема використання моделей окремих компонентів ситеми підготовки юних гімнастів в побудові навчально-тренувального процесу

Математичні моделі вказаних процесів ґрунтуються на обробці даних, отриманих як в безпосередньому виконанні відповідних вправ, так і в ході повних факторних експериментів типу 2^k. Як правило, математичним апаратом в цьому випадку служить теорія статистики, ймовірності та планових експериментів.

Для отримання моделей можуть бути використані: повний факторний експеримент типу 2^k (моделі тренувальних впливів), логістична функція (визначення термінів процесу навчання й розвитку рухових здібностей) та дискримінантна функція (педагогічний контроль за рівнем підготовленості).

Метод повного факторного експерименту дає можливість отримати математичний опис процесу в деякій локальній області факторного простору навколо точки з координатами n - вимірного простору та провести верифікацію регресійної моделі.

4. Побудова узагальнених спектрів за довільного задання даних.

Як правило, на практиці точки замірів сигналу $F(t)$ в точках $t_i,\ i=\overline{1,n}$ з проміжку $[t_0,t_1]$ розміщені довільним чином [1]. Згідно означення

$$\varphi_n = \frac{1}{r_n}\int_{-1}^{1}\omega(x)\,\varphi(x)\,P_n^{(\alpha,\beta)}\ (x)\,dx =$$

$$\frac{2}{r_n(t_1-t_0)}\int_{t_0}^{t_1}\omega\left(\frac{2t-(t_1-t_0)}{t_1-t_0}\right)F(t)\ P_n^{(\alpha,\beta)}\ \left(\frac{2t-(t_1-t_0)}{t_1-t_0}\right)dt.$$

Використовуючи адитивну властивість інтегралу та квадратурну формулу прямокутників, отримуємо

$$\varphi_n = \frac{2}{r_n(t_1-t_0)}\sum_{i=1}^{N}S_i.$$

Тут

$$S_i = \frac{1}{2}(t_i-t_{i-1})\left[F(t_i)\omega(x_i)P_n^{(\alpha,\beta)}(x_i)+F(t_{i-1})\omega(x_{i-1})P_n^{(\alpha,\beta)}(x_{i-1})\right],$$

$$x_i = \frac{2t_i-(t_1-t_0)}{t_1-t_0}.$$

Для $n=0$

$$\varphi_0 = \frac{1}{r_0(t_1-t_0)}\sum_{i=1}^{N}(t_i-t_{i-1})[F(t_i)\omega(x_i)+F(t_{i-1})\omega(x_{i-1})].$$

5. Згладження (усереднення) та ідентифікація сигналів.

Нехай задано значення функції $F(t)$ в точках $t_i,\ i=\overline{1,n}$ з проміжку $[0,l]$ розміщені довільним чином. За означенням усереднення функції на проміжку $t\in[0,l]$ задається формулою

$$F_c = \frac{1}{l}\int_0^l F(t)\,dt.$$

Якщо функція $F(t)$ апроксимується ортогональним рядом

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{r_n}p_n(t),$$

де $p_n(t)$ - многочлени, ортогональні на проміжку $t \in [0, l]$, r_n- нормуючий множник, то

$$F_n = \frac{1}{l}\int_0^l F(t)\, p_n(t) dt,$$

За умови одиничної вагової функції

$$F_0 = \frac{1}{l}\int_0^l F(t)\, dt = F_c,$$

тобто нульовий коефіцієнт ортогонального розкладу за умови одиничної вагової функції є не що інше, як усереднене значення функції на проміжку ортогональності. Згідно побудови нульовий та перший коефіцієнти ортогонального розкладу є відповідно середнім значенням та дисперсією (середньоквадратичним відхиленням).

6. Використання оброблення цифрової інформації при моделювання руху газу в трубопроводі.

В диспетчерських розрахунках гідравлічні характеристики газотранспортного потоку розраховуються в стаціонарному режимі. Це, в основному, пов’язано з тим, що стаціонарний режим руху газу достатньо добре вивчений і при великих об’ємах транзиту слід очікувати, що існуючий режим є близьким до стаціонарного. Розрахункові схеми побудовані на простих аналітичних залежностях, які описують процес руху в ізотермічному режимі при певних умовах на геометричні параметри трубопроводів та умови руху. Однак при побудові газотранспортних мереж за рахунок зміни режимів роботи процес руху газу, як правило, нестаціонарний. Крім цього, час входження потоку газу в стаціонар в трубопроводах високого та середнього тиску є достатньо великий (порядку декількох годин). Все це приводить до значної похибки при гідравлічних розрахунках. В зв’язку з тим виникає необхідність в розробці нестаціонарних моделей руху газу для широкого класу трубопроводів.
Нестаціонарний процес руху газу описується нелінійною системою взаємозв’язаних диференціальних рівнянь в часткових похідних

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\, p}{\partial\, x} + \rho\alpha \dfrac{\partial}{\partial\, x}\left(\dfrac{v^2}{2}\right) + \rho\; g\dfrac{\partial\, h}{\partial\, x} + \dfrac{\lambda\, v^2}{2D}\rho + \dfrac{\partial\,(\rho\, v)}{\partial\, t} = 0 \\ \dfrac{\partial\,(\rho\, v)}{\partial\, x} + \dfrac{1}{c^2}\;\dfrac{\partial\, p}{\partial\, t} = 0. \end{cases}$$

В системі позначено: $p \equiv p(x,t)$- тиск газу; ρ- густина; v- швидкість; λ- коефіцієнт гідравлічного опору; g- прискорення вільного падіння; h- перепад висот по трасі трубопроводу; D- діаметр труби; c- швидкість звуку в газі; α- коефіцієнт Коріоліса.

В стаціонарному ізотермічному випадку рівняння руху газу в трубопроводі описується рівнянням

$$\frac{dp}{\rho} + \alpha d\left(\frac{v^2}{2}\right) + \lambda\frac{v^2}{2}\frac{dx}{D} + gdh = 0.$$

Обчислювальний експеримент проводився на основі заміряних даних тиску для трубопроводу довжиною 122 км з внутрішнім діаметром 1.388 м, поданих в таблиці 1, де позначено: t – час; p – значення тиску.

Таблиця 1.
Значення тиску в усталеному ($p_{стац}$) та неусталеному ($p_{нестац}$) режимах руху газу для різних значень часів (час).

$P_{стац}$	$P_{нестац}$	час	$P_{стац}$	$P_{нестац}$	час	$P_{стац}$	$P_{нестац}$	час
65.57	68.62	3441	65.6	68.31	2726	65.83	62.9	2013
65.36	68.42	3372	65.3	68.2	2711	65.83	62.7	2011
65.57	68.28	3295	65.51	68.05	2614	65.59	62.9	1980
65.36	68.17	3246	65.51	67.91	2611	65.38	62.67	1975

На основі поданих значень обчислені нульовий та перший коефіцієнти ортогонального розкладу за многочленами Лежандра, які приймають значення $\varphi_0 = 65.4535$, φ_1=-0.0220 .

7. Використання спектральних розкладів для ідентифікації.

Спектральні розклади сигналів в базисах ортогональних многочленів можна з успіхом використовувати для ідентифікації фізичних процесів. Це твердження підтверджується числовим експериментом, результати якого подані в таблиці 2.

Таблиця 2.
Значення перших трьох коефіцієнтів розкладу тиску в ряд за многочленами Лежандра за стаціонарного (стаціонар) та нестаціонарного (нестаціонар) руху газу.

N	стаціонар			нестаціонар		
	F_0	F_1	F_2	F_0	F_1	F_2
20	65.5304	-0.1108	3.8603	63.0763	0.6783	4.0807
25	65.525	-0.0715	2.7262	63.1008	0.4642	3.3597
30	65.5259	-0.0637	2.1005	63.2187	0.0612	3.2366
35	65.5117	-0.0112	1.3491	63.5404	-0.7882	3.1628
40	65.5407	-0.0845	1.6021	64.164	-1.8828	3.021

В першій колонці таблиці 2 подані значення кількості перших замірів тиску з таблиці 1 на основі яких обчислюються коефіцієнти Фур'є-Лежандра. Як було показано вище, нульовий коефіцієнт Фур'є-Лежандра визначає середнє арифметичне значення заміряної величини на відповідному проміжку. Далі, оскільки у випадку многочленів Лежандра $P_1(t) = t$, то за означенням

$$F_1 = \frac{1}{l}\int_0^l F(t)p_1(t)dt = \frac{1}{l}\int_0^l F(t)dt.$$

Остання формула виражає математичне сподівання випадкової величини. Аналіз результатів, поданих в таблицях 2 та 3 показує, що цю величину можна використовувати для ідентифікації характеру руху газу в трубопроводі. Зокрема, з аналізу результатів, поданих в таблиці 4.3, слідує, що якщо перший коефіцієнт Фур'є-

Якобі за модулем менший за одиницю, то процес руху газу усталений, в притивному випадку – нестаціонарний.

Висновки. Моделювання на сучасному етапі розвитку науки є одним з найбільш дієвих і перспективних інструментів вивчення складних явищ та процесів. На ідеї моделювання базуються всі методи наукових досліджень, як теоретичні, при яких використовуються різноманітні абстрактні моделі, так і експериментальні, що користуються предметними моделями.

Метод моделювання є ефективним інструментом для вивчення закономірностей процесу рухової підготовки та розробки програм тренування дітей і підліків.

Перспективою подальших досліджень є розробка і обгрунтування ефективності використання експертних систем та систем підтримки рішень у процесі навчання і розвитку рухових здібностей дітей і підлітків.

В роботі показано, що використання ортогональних базисів та методів статистично-ймовірнісної обробки інформації дає можливість вирішувати складні задачі за умови невизначеності. Так побудова кореляційних залежностей в базисах ортогональних многочленів і дає можливість апроксимації та згладження експериментальних даних та на базі моментної теорії знайти певні статистично-ймовірностні параметри процесів, що вивчаються.

Література

1. *П'янило Я. Д.* Проекційно-ітераційні методи розв'язування прямих та обернених задач переносу. – Львів: Сплайн, 2011.- 248 с.
2. *Авраменко В. І., Карімов І. К.* Теорія ймовірностей і математична статистика : навч. посібник / - 2-ге вид., перероб. і доп. - Дніпродзержинськ : ДДТУ, 2013. — 245 с.
3. *А. Власов, А. Демічковський, О. Іващенко, А. Лопатьєв, М. Пітин, Я. П'янило, О. Худолій.* Системний підхід і математичне моделювання біологічних та природних об'єктів і процесів / Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, - 2016, № 23, с.17-28.
4. *M. Hu.* Visual Pattern Recognition by Moment Invariants *IRE Trans. Inf. Theory*, 8:179–187, 1962.
5. Основи теорії відносності: навч. пос. / М.Ш. Певзнер, – Д. : ДВНЗ «Національний гірничий університет», 2013. – 134 с.

Construction of regression dependences using orthogonal transformations and theory of moments

Yaroslav Pyanylo, Oleg Khudoliy, Anatolii Lopatyev, Oleksandr Kalinichenko

The work examines the issue of constructing regression and empirical dependencies for the study of processes described by time series of discrete data.

Отримано 29.11.22.