УДК 539.3
doi.org/10.15407/fmmit2022.34-35.084

Гранично-інтегральний аналіз тривимірної задачі для простору з періодичним масивом податливих включень

Володимир Станкевич[1], Олег Свєтлов[2], Марко Агеєнков[2]

[1]Доцент, д. ф.-м. н., кафедра механіки Львівського національного університету імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, e-mail stan_volodja@yahoo.com
[2]Аспірант, e-mail osvietlov@ gmail.com
[3]Магістр, e-mail marko.aheienkov@gmail.com

Розглянуто статичну задачу про розривні навантаження пружного простору з періодичним масивом податливих включень. Задачу зведено до розв'язання двовимірного граничного інтегрального рівняння другого роду типу Ньютонівського потенціалу відносно невідомої функції розкриття включення. За допомогою розв'язків рівняння визначені статичні коефіцієнти інтенсивності напружень відриву та проаналізовані їх залежності від відстані між дефектами, контрастності жорсткостей матриці і наповнювача, заповнення ін'єкційним матеріалом тріщини.

Ключові слова: безмежний простір, одноперіодичний масив податливих включень, граничні інтегральні рівняння, коефіцієнт інтенсивності напружень.

Вступ. Дослідження напружено-деформівного стану пружних тіл з дефектами типу тонкостінних включень представляє інтерес з точки зору аналізу міцності композитних структур, покращення їх функціональних властивостей, підвищенням опірності статичним та динамічним навантаженням тощо [1-4]. Окрім того, такі структурні дефекти можна штучно створювати шляхом наповнення матриць для отримання нанокомпозитних структур. Окремий інтерес представляють тонкокостінні податливі включення, якими моделюють т. зв. “заліковані” відповідним заповнювачем тріщини [5, 6]. Спостережено, що технологія ін'єктування тріщин уможливлює підвищення міцності конструкцій та подовження їх ресурсу [7-9]. При цьому недостатньо вивченими є питання впливу на перерозподіл напружень в околі дефектів факторів структурованого розташування частково ін'єктованих наповнювачем тріщин.

У пропонованій роботі розглянуто тривимірну статичну задачу про розривне навантаження безмежного тіла з одноперіодичним масивом неповністю заповнених податливим матеріалом тріщин. Дослідження проведено з використанням методу граничних інтегральних рівнянь, який раніше показав свою ефективність для випадку усталеного в часі навантаження тіл з податливими включеннями [10, 11].

1. Постава задачі.

Розглядаємо безмежний простір (матрицю), послаблений одноперіодичним масивом пружних включень, серединні поверхні яких є круговими областями S радіуса a , розташованими в паралельних площинах на відстанях d одна від одної (рис. 1.*а*).

Геометричні центри вказаних областей розташовані на одній лінії. Ін’єктований матеріал (наповнювач) включень займає кругові області $\tilde{S}$ радіуса b з найбільшою товщиною $2h \ll 2a$ (рис. 1.b). Між матеріалами матриці та наповнювача має місце ідеальний механічний контакт. На безмежності тіло навантажено розривними зусиллями p . Матеріал матриці характеризується модулем Юнга E , Пуассоновим коефіцієнтом ν та модулем зсуву $G = E/\left[2(1+\nu)\right]$; матеріал наповнювача – модулем Юнга $E_0 \ll E$.

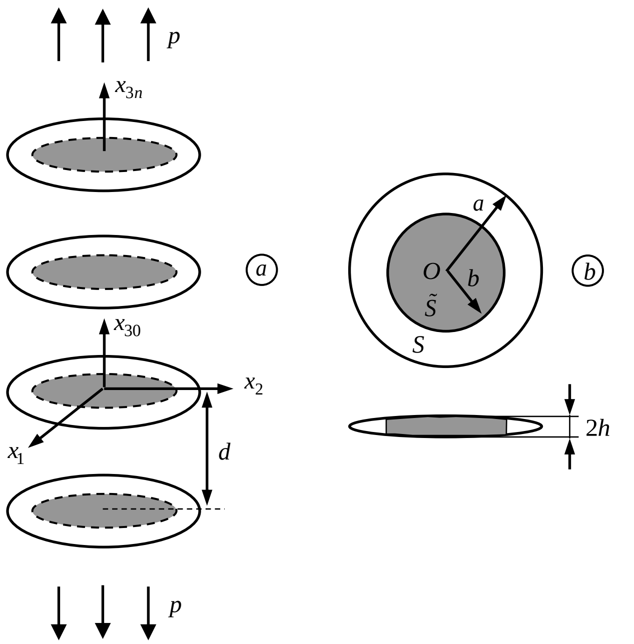

Рис. 1. Розрахункова схема задачі.

Задача дослідження напружено-деформівного стану тіла з включеннями зводиться до розв’язання диференціального рівняння руху

$$\Delta_3 \vec{\mathbf{u}} + \frac{1}{1-2\nu} grad\, div \vec{\mathbf{u}} = 0 \ , \tag{1}$$

де $\vec{\mathbf{u}}(u_1, u_2, u_3)$ – вектор пружних переміщень; $\Delta_3 = \sum_{i=1}^{3} \partial^2 / \partial x_i^2$ – тривимірний

Лапласів оператор.

Крайові умови задачі знесені на серединну поверхню S включення і відображають лінійну залежність між напруженнями та переміщеннями [8, 12]

$$\sigma_{33}^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{[u_3^*(\mathbf{x})]}{2h(\mathbf{x})} E_0 \ , \ \mathbf{x}(x_1, x_1, 0) \in \tilde{S} \\ 0 \ , \ \mathbf{x}(x_1, x_1, 0) \in S \setminus \tilde{S} \end{cases} . \tag{2}$$

Тут $[u_3^*(\mathbf{x})]$ – розрив зміщень точок протилежних поверхонь включень, які на підставі принципу суперпозиції вибрано у вигляді подання

$$u_3^*(\mathbf{x}) = u_3^0(\mathbf{x}) + u_3^1(\mathbf{x}) \ ,$$

де $u_3^{0\pm}(\mathbf{x}) = \pm \dfrac{h(\mathbf{x})}{E} p$ – зміщення в однорідному тілі під заданим на безмежності навантаженням p ; $u_3^{1\pm}(\mathbf{x})$ – зміщення протилежних поверхонь дефектів під дією заданого на них навантаження $-p$. Тоді

$$[u_3^0(\mathbf{x})] = u_3^{0+}(\mathbf{x}) - u_3^{0-}(\mathbf{x}) = \frac{2h(\mathbf{x})}{E} p \ ,$$

$$[u_3^1(\mathbf{x})] = u_3^{1+}(\mathbf{x}) - u_3^{1-}(\mathbf{x}) = -4\pi \Delta u_3(\mathbf{x}) \ , \ \Delta u_3(\mathbf{x}) = \frac{u_3^{1-}(\mathbf{x}) - u_3^{1+}(\mathbf{x})}{4\pi} \ . \tag{3}$$

Напруження у тілі за аналогією з переміщеннями подаємо у виді

$$\sigma_{33}^*(\mathbf{x}) = \sigma_{33}^0(\mathbf{x}) + \sigma_{33}^1(\mathbf{x}) \ , \ \sigma_{33}^0(\mathbf{x}) = p \ . \tag{4}$$

2. Граничні інтегральні рівняння задачі.

Розв'язок задачі, який задовольняє рівнянню (1), вибираємо у вигляді інтегрального подання [12]

$$u_3^1(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial}{\partial x_{30}} + \frac{x_{30}}{2(1-\nu)} \Delta_2 \right] \mathrm{H}(\mathbf{x}_0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial x_{3n}} + \frac{x_{3n}}{2(1-\nu)} \Delta_2 \right] \mathrm{H}(\mathbf{x}_n) \ , \tag{5}$$

де Δ_2 – двовимірний Лапласів оператор; $\mathrm{H}(\mathbf{x}_n) = \iint\limits_S \Delta u_3(\xi) \dfrac{dS_\xi}{|\mathbf{x}_n - \xi|}$ – Ньютонівський потенціал; $|\mathbf{x}_n - \xi| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_{3n}^2}$. Підставивши вираз (5) для переміщень у співвідношення закону Гука, отримуємо інтегральне подання для напружень

$$\sigma_{33}^1(\mathbf{x}) = \frac{G}{1-\nu} \left\{ -\Delta_2 \mathrm{H}(\mathbf{x}_0) - 2\sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - x_{3n} \frac{\partial}{\partial x_{3n}} \right] \Delta_2 \mathrm{H}(\mathbf{x}_n) \right\} \ . \tag{6}$$

З використанням співвідношень (3)-(6) для переміщень і напружень крайові умови (2) задачі трансформуємо до інтегрального рівняння

$$\frac{G}{1-\nu} \left\{ -\Delta_2 \mathrm{H}(\mathbf{x}) - 2\sum_{n=1}^{\infty} \Delta_2 \left[1 - x_{3n} \frac{\partial}{\partial x_{3n}} \right] \mathrm{H}(\mathbf{x}_n) \right\} + p =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2h(\mathbf{x})}{E} p \cdot \dfrac{E_0}{2h(\mathbf{x})} - 4\pi \Delta u_3(\mathbf{x}) \dfrac{E_0}{2h(\mathbf{x})} \ , & \mathbf{x} = \mathbf{x}_0(x_1, x_2, x_{30} = 0) \in \tilde{S} \\ 0 \ , & \mathbf{x} \in S \setminus \tilde{S} \end{cases} \ , \tag{7}$$

де $x_{3n} = nd$. Скориставшись поданням [13]

$$|\mathbf{x}_n - \xi| = \int_0^\infty \exp(-|x_{3n}|\tau)\, J_0(\tau|\mathbf{x}_0 - \xi|)\, d\tau \ ,$$

виразами для сум

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nd\tau} = \frac{e^{-d\tau}}{1-e^{-d\tau}} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nd\tau} = \frac{e^{-d\tau}}{\left(1-e^{-d\tau}\right)^2} \ ,$$

та диференціальною залежністю

$$\Delta_2 J_0(\tau|\mathbf{x}_0 - \xi|) = -\tau^2 J_0(\tau|\mathbf{x}_0 - \xi|) \ ,$$

де $J_0(z)$ – Бесселя функція першого роду нульового порядку дійсного аргументу z, інтегральне рівняння (7) записуємо у вигляді

$$-4\pi(1-\nu^2)\frac{E_0}{E}\frac{\Delta u_3(\mathbf{x})}{h(\mathbf{x})}\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} + \Delta_2 \iint_S \Delta u_3(\xi)\frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}-\xi|} -$$

$$-2\iint_S \Delta u_3(\xi)\int_0^\infty \Omega(\tau,d)\, J_0(\tau|\mathbf{x}-\xi|)\, d\tau\, dS_\xi = \frac{1-\nu}{G}\, p \begin{Bmatrix} 1 - E_0/E \ , \ \mathbf{x}\in\tilde{S} \\ 1 \ , \ \mathbf{x}\in S\setminus\tilde{S}\end{Bmatrix} . \tag{8}$$

Тут ядро $\Omega(\tau,d)$ має таку структуру

$$\Omega(\tau,d) = \left(1 + \frac{\tau d}{1-e^{-d\tau}}\right)\frac{\tau^2 e^{-d\tau}}{1-e^{-d\tau}} \ .$$

Рівняння (8) є двовимірним граничним інтегральним рівнянням (ГІР) другого роду типу Ньютонівського потенціалу відносно невідомої функції Δu_3 стрибка зміщень протилежних поверхонь включення.

Для забезпечення природнього змикання поверхонь включення на його контурі невідому функцію Δu_3 та параметр $h(\mathbf{x})$ товщини вибираємо у вигляді [12]

$$\Delta u_3(\mathbf{x}) = \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2}\,\alpha(\mathbf{x}) \quad , \quad h(\mathbf{x}) = \frac{h}{a}\sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2}$$

де $\alpha(\mathbf{x})$ – нова невідома, двічі неперервно-диференційовна в області S функція. Тоді ГІР (8) задачі про дослідження напружено-деформівного стану тіла з системою періодично розташованих включень набуває остаточного вигляду

$$-4\pi(1-\nu^2)\frac{E_0}{E}\frac{a}{h}\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}\alpha(\mathbf{x}) + \iint_S \sqrt{a^2-\xi_1^2-\xi_2^2}\,\alpha(\xi)\frac{dS_\xi}{|\mathbf{x}-\xi|^3} -$$

$$-2\iint_S \sqrt{a^2-\xi_1^2-\xi_2^2}\,\alpha(\xi)\int_0^\infty \Omega(\tau,d)\, J_0(\tau|\mathbf{x}-\xi|)\, d\tau\, dS_\xi = \frac{1-\nu}{G}\, p \begin{Bmatrix} 1 - E_0/E \ , \ \mathbf{x}\in\tilde{S} \\ 1 \ , \ \mathbf{x}\in S\setminus\tilde{S}\end{Bmatrix} . \tag{9}$$

Перші два доданки отриманого ГІР відповідають задачі про безмежний простір з поодиноким включенням.

3. Числове розв'язування ГІР.

Отримане інтегральне рівняння містить гіперсингулярність виду $|\mathbf{x}-\xi|^{-3}$. Регуляризація ГІР типу (9) описана в [12, 14]. Для отримання дискретного аналогу ГІР застосовували рівномірне граничноелементне розбиття кругової області S дефекту в напрямку полярних координат (крок розбиття за радіальною координатою r становив $0{,}05a$, за кутовою координатою φ – $\pi/12$) з кусково-постійною апроксимацією функцій α_j в межах кожного елементу. На півбезмежному інтервалі числове інтегрування проводили Лагерровими квадратурами. Колокаційним задоволенням ГІР у вузлових точках задачу зводили до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно вузлових значень функції α_j .

За допомогою значень розв'язків $\alpha(\mathbf{x})$ рівняння (9) в контурних точках області дефекту визначали значення коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) нормального відриву

$$K_I(\varphi) = -\frac{2G\pi\sqrt{\pi a}}{1-\nu}\alpha(a,\varphi) \ .$$

4. Аналіз результатів.

На рис. 2 показано залежності відносних КІН $\tilde{K}_I = |K_I| / K_I^{st}$ ($K_I^{st} = 2N_0\sqrt{a/\pi}$ – статичний КІН відриву для кругової тріщини в безмежному просторі під зусиллями p) повністю заповнених тріщин від параметрів d/a відстані між включеннями, E_0/E – контрастності жорсткостей матеріалу дефектів та матриці (рис. 6 *а*), h/a – товщини включення (рис. 6 *б*). Під час обчислень Пуассонів коефіцієнт матеріалу приймали $\nu = 0{,}3$.

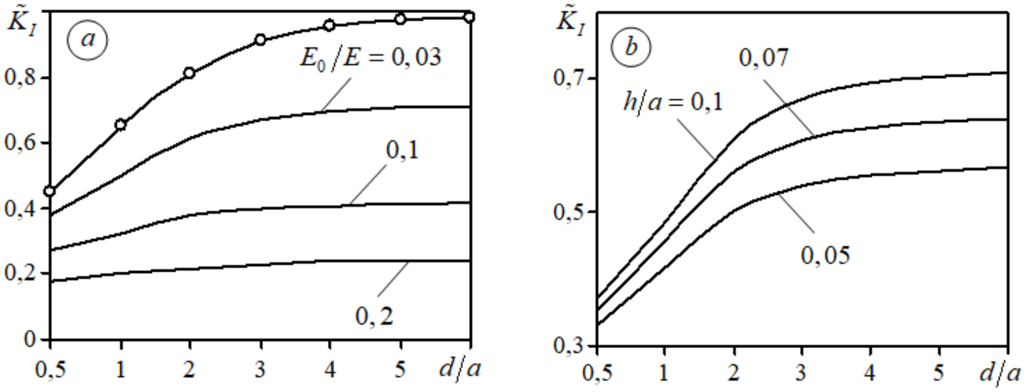

Рис. 2. Залежності КІН відриву від відстані між включеннями: a – $h/a = 0{,}1$; b – $E_0/E = 0{,}03$.

Зростання відстані між дефектами супроводжується монотонним збільшенням значень КІН з виходом на свій аналог для випадку поодинокого включення у безмежному просторі. КІН $\tilde{K}_I$ менші своїх аналогів для тріщин (маркована крива).

Аналогічний феномен зауважений для простору з періодичною системою тріщин в [15]. Зростання жорсткості ін'єкційного матеріалу призводить до зменшення КІН (рис. 2 *a*), збільшення товщини включення – до зростання значень $\tilde{K}_I$ (рис. 2 b), що пояснюється початковим розпиранням тріщини. Така ж поведінка раніше спостережена стосовно включень стрічкової форми [6].

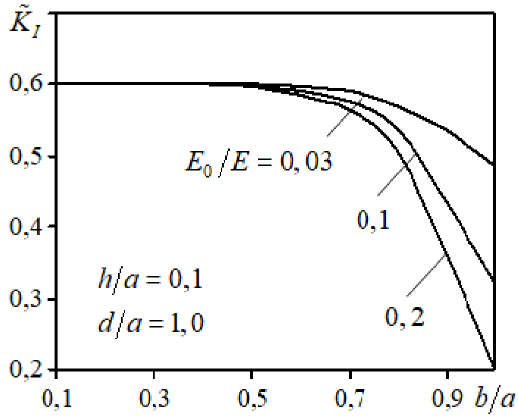

Рис. 3. Залежності КІН відриву від параметру b/a заповнення тріщин та E_0/E – контрастності жорсткостей матриці і наповнювача.

На рис. 3 показано залежність нормованого КІН від параметрів b/a заповнення тріщин ін'єкційним матеріалом та E_0/E – контрастності жорсткостей матеріалів за сталих значень $d/a = 1,0a$, $h/a = 1 = 0,1a$. Одночасні зростання жорсткості ін'єкційного матеріалу та заповненням ним тріщин призводять до пониження КІН (ефект зміцнення). Таке ж явище зауважено для поодиного включення [6].

Висновки. Запропоновано гранично-інтегральний підхід для дослідження напружено-деформівного стану безмежного простору з періодичним масивом пружних податливих включень під розривними зусиллями. Задача зведена до розв'язання одного двовимірного ГІР другого роду типу Ньютонівського потенціалу відносно невідомої функції розкриття поверхонь дефектів. Показано ефект пониження значень КІН підвищенням жорсткості ін'єктованого матеріалу включення та величини заповнення ним тріщин.

Література

[1] *Панасюк В.В., Стадник М.М., Силованюк В.П.* Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями. – К.: Наук. Думка. – 1986. – 216 с.

[2] *Стадник М.М.* Термопружний стан та міцність тіл з тонкими включеннями довільної жорсткості. – Львів: Вид-во НЛТУ України; "Дослідно-видавничий центр Наукового товариства ім. Т.Г. Шевченка". – 2015. – 316 с.

[3] *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ. – 2007. – 716 с.

[4] *Sulym H., Vasylyshyn A., Pasternak I.* Influence of imperfect interface of anisotropic thermomagnetoelectroelastic bimaterial solids on interaction of thin deformable inclusions // Acta Mech. et Automat. – 2022. – Vol. **16**, No 3. – P. 242–249.

[5] *Галазюк В.А., Сулим Г.Т.* Напружено-деформований стан необмеженого середовища із "залікованою" тріщиною // Доп. НАН України. – 2013. – № 10. – С. 65–69.

[6] *Panasyuk V.V., Marukha V.I., Sylovanyuk V.P.* Injection Technologies for the Repair of Damaged Concrete Structures. – Springer. Berlin. – 2014. – 241 p.

[7] *Czarnecki L., Emmons P.H.* Naprava i Ochrona Konstrukcji Betonowych. – Polski Cement. Krakow. – 2002. – 434 s.

[8] *Panasyuk V.V., Marukha V.I., Sylovanyuk V.P.* Efficient injection materials and the technologies of restoration of the serviceability of damaged building structures intended for long-termoperation // Materials Science. – 2018. – Vol. **54**, No 2. – P. 154-162.

[9] *Молодід О.С., Плохута Р.О.* Технологія ремонту тріщин в залізобетонних конструкціях залежно від ширини їх розкриття // Шляхи підвищення ефективності будівництва в умовах формування ринкових відносин. – 2019. – Вип. 39. – С. 154-161.

[10] *Жбадинський І.Я.* Взаємодія одноперіодичних податливих дискових еліптичної форми включень при падінні пружної гармонічної хвилі // Доп. НАН України. – 2018. – № 10. – С. 37-43.

[11] *Stankevich V.Z., Butrak I.O., Zhbadyns'kyi I.Y.* Diffraction of Rayleigh waves on a compliant inclusion in the elastic half space // J. of Math. Sc. – 2018. – Vol. **231**, No 5. – P. 641–649.

[12] *Хай М.В.* Двумерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения. – К.: Наук. Думка. – 1993. – 253 с.

[13] *Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.* Table of Integrals, Series, and Products. − AP Academic Press. − 2007. – 1221 p.

[14] *Hsiao G.C., Wendland W.L.* Boundary Integral Equations. – Springer. – 2021. – 796 p.

[15] *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. Думка. – 1981. – 324 с.

Boundary-integral analysis of a 3-d problem for a body with a periodic array of flexible inclusions

Volodymyr Stankevych, Oleg Svietlov, Marko Aheienkov

The static problem of discontinuous loading of an elastic body with a periodic array of flexible inclusions is considered. The problem is reduced to solving a 2-D boundary integral equation of the second kind of the Newton potential type with respect to an unknown inclusion opening function. With the help of solutions of the equation, the static stress intensity factors mode I are determined and their dependences on the distance between defects, the contrast between the rigidity of the matrix and the inclusion, and the filling of cracks with the injection material are analyzed.

Отримано 28.11.22.